Вестник Омского университета, 1998, Вып. 2. С. 21-24

УДК 519.1

Задача об ожерельях

Д.И. Яковенко

Омский государственный университет, кафедра алгебры
644077, Омск, пр. Мира, 55-А

Получена 15 мая 1997 г.

We find a number of necklaces from m beads of q kinds, and besides the necklaces are considered to be equivalent in case, if they are combining with turnings or axises' symmetry.

Рассмотрим следующую комбинаторную задачу.

Задача 1. Имеется k сортов бусин (каждый сорт в изобилии). Сколько ожерелий из n бусин можно составить?

Эта задача имеет две постановки. Во-первых, можно считать, что ожерелья равны тогда и только тогда, когда одно получается из другого поворотом. Во-вторых, можно считать равными два ожерелья, полученные друг из друга поворотом, осевой симметрией или их композицией.

"Задача об ожерельях" в первой постановке хорошо известна алгебраистам. Еще К.Гаусс вывел формулу, которая дает число неприводимых нормированных многочленов над конечным полем [1]. В XX веке Е.Витт нашел число базисных слов длины n в алфавите из k букв в свободной алгебре Ли. И обе эти формулы совпадают с решением задачи об ожерельях! При этом доказательство формулы Витта такое же, как решение комбинаторной задачи об ожерельях [2]. В качестве следствия из формулы Витта легко вывести малую теорему Ферма и ее обобщение - теорему Эйлера.

В нашей работе рассматривается другой вариант этой задачи.

Задача 2. Найти число ожерелий из m бусин q сортов, если имеется m_1 бусин 1-го сорта, m_2 бусин 2-го сорта,..., m_q бусин q-го сорта. Это число обозначается $B(m_1, m_2, \ldots, m_q)$. При этом равными считаются ожерелья, полученные друг из друга с помощью поворота или отражения.

Мы решили эту задачу, применяя лемму Бернсайда [1].

Лемма Бернсайда. *Для любой группы перестановок имеет место равенство* $n(G) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} t(g)$, *где* $n(G)$ *- число орбит группы* G, $t(g)$ *- число неподвижных точек перестановки* g.

В качестве следствия из формулы для $B(m_1, m_2, \ldots, m_q)$ получено решение задачи 1 во второй постановке.

Перейдем к решению задачи 2. Эта задача равносильна следующей задаче: сколькими различными способами можно раскрасить вершины правильного m-угольника в q цветов, чтобы было m_1 вершин 1-го цвета, m_2 вершин 2-го цвета,..., m_q вершин q-го цвета. Здесь два способа раскраски неотличимы, если один из них можно получить из другого, применяя к m-угольнику либо преобразование вращения, либо симметрии относительно осей.

Пусть $\mathbf{M}$ - множество всевозможно раскрашенных m-угольников. D - группа симметрий m-угольника, состоящая из $2m$ преобразований. Группа D естественным образом определяет группу перестановок на множестве $\mathbf{M}$. Именно, если $g \in D$ - некоторое преобразование симметрии, то каждому многоугольнику из $\mathbf{M}$ можно сопоставить некоторый многоугольник, который получается из первого симметрией g. Это соответствие является перестановкой на множестве $\mathbf{M}$, которую будем обозначать $\tilde{g}$. Группу всех таких перестановок множества $\mathbf{M}$, определяемых перестановками из D, будем обозначать $\tilde{D}$.

При подсчете числа ожерелий два многоугольника считаются одинаковыми, если один можно перевести в другой какой-то перестановкой из $\tilde{D}$, то есть они содержатся в одной орбите группы $\tilde{D}$, действующей на множестве $\mathbf{M}$. Таким образом, для того чтобы определить число геометрически различимых способов раскраски вершин m-угольника (число ожерелий), нужно найти количество орбит группы $\tilde{D}$ на множестве $\mathbf{M}$. Количество орбит можно найти по лемме Бернсайда, для этого необходимо определить число неподвижных точек каждой перестановки из $\tilde{D}$.

Рассмотрим сначала повороты. Если d общий делитель чисел $m_1, m_2, \dots, m_q$, то поворот g_1 на угол $\frac{2\pi}{d}$ оставляет неподвижными ожерелья, состоящие из d одинаковых кусков длины $\frac{m}{d}$. Каждый кусок состоит из $\frac{m_1}{d}$ бусин 1-го сорта, $\frac{m_2}{d}$ бусин 2-го сорта,..., $\frac{m_q}{d}$ бусин q-го сорта, поэтому число неподвижных точек для этого поворота равно числу способов расставить эти бусины на $\frac{m}{d}$ местах, то есть $t(\tilde{g}) = P\left(\frac{m_1}{d}, \frac{m_2}{d}, \dots, \frac{m_q}{d}\right)$, где $P(k_1, k_2, \dots, k_n)$ - полиномиальные коэффициенты [5].

Рассмотрим поворот g_i на угол $\frac{2\pi i}{d}$, где $i = 1, 2, \dots, d$. Этот поворот имеет такое же количество неподвижных точек, сколько g_i, если i взаимно просто с d. Количество чисел, не превосходящих d и взаимно простых с d, - это функция Эйлера $\varphi(d)$. Обозначим через Σ_1 сумму $t(\tilde{g})$ по всем поворотам, тогда $\sum_1 = \sum_d \varphi(d) \cdot P\left(\frac{m_1}{d}, \frac{m_2}{d}, \dots, \frac{m_q}{d}\right)$, где d пробегает множество всех общих делителей чисел $m_1, m_2, \dots, m_q$.

Рассмотрим симметрии относительно осей.

1 случай: m нечетно. В этом случае симметричные ожерелья существуют только тогда, когда среди чисел $(m_1, m_2, \dots, m_q)$ только одно нечетно. Пусть m_1 нечетно, g - симметрия относительно оси, проходящей через некоторую вершину. Тогда неподвижными будут ожерелья, симметричные относительно оси,проходящей через бусину 1-го сорта. По одну сторону от оси находится $\frac{m-1}{2}$ бусин, из них $\frac{m_1-1}{2}$ бусин 1-го сорта, бусин $\frac{m_2}{2}$ 2-го сорта,..., бусин $\frac{m_q}{2}$ q-го сорта, поэтому

$t(\tilde{g}) = P\left(\frac{m_1-1}{2}, \frac{m_2}{2}, \ldots, \frac{m_q}{2}\right) = P\left(\left[\frac{m_1}{2}\right], \left[\frac{m_2}{2}\right], \ldots, \left[\frac{m_q}{2}\right]\right)$, где $[x]$ - целая часть числа x. Такое же количество неподвижных точек имеет каждая из m перестановок, соответствующих таким симметриям. Обозначим через Σ_2 сумму $t(\tilde{g})$ по всем отражениям, тогда $\sum_2 = m \cdot P\left(\left[\frac{m_1}{2}\right], \left[\frac{m_2}{2}\right], \ldots, \left[\frac{m_q}{2}\right]\right)$

2 случай: m четно. Ожерелья, симметричные относительно оси, проходящей между бусинами, существуют только в том случае, если все m_i $(i = 1,2,\ldots,q)$ четны. Ожерелья, симметричные относительно оси, проходящей через две бусины, существуют только в двух случаях: все m_i $(i = 1,2,\ldots,q)$ четны или ровно два из них нечетны. а) Для определенности будем считать, что m_1 и m_2 нечетны, остальные m_i четны. Пусть g - симметрия относительно некоторой оси, проходящей через противоположные вершины. Неподвижными точками для $\tilde{g}$ будут ожерелья, симметричные относительно оси, проходящей через бусины 1-го и 2-го сортов. По одну сторону от оси находится $\frac{m-2}{2}$ бусин, из них $\frac{m_1-1}{2}$ бусин 1-го сорта, $\frac{m_2-1}{2}$ - 2-го сорта, $\frac{m_i}{2}$ - i-го сорта $(i = 3,4,\ldots,q)$. Учитывая, что бусины 1-го и 2-го сорта можно поменять местами, получим $t(\tilde{g}) = 2P\left(\frac{m_1-1}{2}, \frac{m_2-1}{2}, \frac{m_3}{2}, \ldots, \frac{m_q}{2}\right)$.

Таких симметрий $\frac{m}{2}$, поэтому $\sum_2 = m \cdot P\left(\left[\frac{m_1}{2}\right], \left[\frac{m_2}{2}\right], \ldots, \left[\frac{m_q}{2}\right]\right)$.

б) Все $m_1, m_2, \ldots, m_q$ четны. Если g - симметрия относительно оси, проходящей через две вершины, то неподвижными точками для $\tilde{g}$ будут симметричные ожерелья, у которых две бусины i-го сорта расположены на этой оси $(i = 1,2,\ldots,q)$. Их

$$t(\tilde{g}) = P\left(\frac{m_1-2}{2}, \frac{m_2}{2}, \ldots, \frac{m_q}{2}\right) + P\left(\frac{m_1}{2}, \frac{m_2-2}{2}, \frac{m_3}{2}, \ldots, \frac{m_q}{2}\right) + \ldots + P\left(\frac{m_1}{2}, \frac{m_2}{2}, \ldots, \frac{m_{q-1}}{2}, \frac{m_q-2}{2}\right) = P\left(\frac{m_1}{2}, \frac{m_2}{2}, \ldots\right.$$

Таких симметрий $\frac{m}{2}$.

Если g - симметрия относительно оси, проходящей между бусинами, то $t(\tilde{g}) = P\left(\frac{m_1}{2}, \frac{m_2}{2}, \ldots, \frac{m_q}{2}\right)$.

Таких симметрий также $\frac{m}{2}$. Значит, $\sum_2 = m \cdot P\left(\frac{m_1}{2}, \frac{m_2}{2}, \ldots, \frac{m_q}{2}\right) = m \cdot P\left(\left[\frac{m_1}{2}\right], \left[\frac{m_2}{2}\right], \ldots, \left[\frac{m_q}{2}\right]\right)$.

Итак, в случаях 1, 2а и 2б получились одинаковые формулы для вычисления $\sum t(\tilde{g})$, где сумма берется по всем отражениям: $\sum_2 = m \cdot P\left(\left[\frac{m_1}{2}\right], \left[\frac{m_2}{2}\right], \ldots, \left[\frac{m_q}{2}\right]\right)$

По лемме Бернсайда

$$t(\widetilde{D})=\frac{1}{2m}\cdot\left(\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2\right)=\frac{1}{2m}\cdot\sum_d\varphi(d)\cdot P\left(\frac{m_1}{d},\frac{m_2}{d},\ldots,\frac{m_q}{d}\right)+\frac{1}{2}\cdot P\left(\left[\frac{m_1}{2}\right],\left[\frac{m_2}{2}\right],\ldots,\left[\frac{m_q}{2}\right]\right).$$

Если среди чисел m_i $(i=1,2,\ldots,q)$ более двух нечетных, то нет симметричных ожерелий, и $t(\widetilde{D})=\frac{1}{2m}\cdot\sum_1=\frac{1}{2m}\cdot\sum_d\varphi(d)\cdot P\left(\frac{m_1}{d},\frac{m_2}{d},\ldots,\frac{m_q}{d}\right).$

Итак, если среди $m_1,m_2,\ldots,m_q$ не более двух нечетных, то

$$B(m_1,m_2,\ldots,m_q)=\frac{1}{2m}\cdot\sum_d\varphi(d)\cdot P\left(\frac{m_1}{d},\frac{m_2}{d},\ldots,\frac{m_q}{d}\right)+\frac{1}{2}\cdot P\left(\left[\frac{m_1}{2}\right],\left[\frac{m_2}{2}\right],\ldots,\left[\frac{m_q}{2}\right]\right) \tag{1}$$

Если среди чисел $m_1,m_2,\ldots,m_q$ более двух нечетных, то

$$B(m_1,m_2,\ldots,m_q)=\frac{1}{2m}\cdot\sum_d\varphi(d)\cdot P\left(\frac{m_1}{d},\frac{m_2}{d},\ldots,\frac{m_q}{d}\right) \tag{2}$$

(здесь d пробегает множество всех общих делителей чисел $m_1,m_2,\ldots,m_q$).

Рассмотрим несколько примеров и теоретико-числовых следствий полученных формул.

Пример 1. Число ожерелий из m различных бусин $(m>2)$ $B(1,1,\ldots,1)=\frac{(m-1)!}{2}$.

Пример 2. Число ожерелий из n синих и k красных бусин равно

$$B(n,k)=\frac{1}{2(n+k)}\cdot\sum_{d\,|(n,k)}\varphi(d)\cdot C_{\frac{n+k}{d}}^{\frac{k}{d}}+\frac{1}{2}\cdot C_{\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{k}{2}\right]}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \tag{3}$$

(здесь $C_n^0=1$ для любого $n\geq 0$).

Следствие 1. Для полимиальных коэффициентов справедливо сравнение $P(m_1,m_2,\ldots,m_q)\equiv P\left(\frac{m_1}{p},\frac{m_2}{p},\ldots,\frac{m_q}{p}\right)(mod p)$. Оно получается из формулы (1), если $(m_1,m_2,\ldots,m_q)=p$.

Следствие 2. Из формулы для числа ожерелий можно получить известное тождество для функции Эйлера [6], полагая n = 0 в формуле (3): $k=\sum_{d\,|(n,k)}\varphi(d)$

Задачу 1 во второй постановке можно решить тем же методом, что и задачу 2. Но можно найти число ожерелий $B_{m,q}$ из mусин с qтов (число бусин каждого сорта неограничено), суммируя

$B(m_1, m_2, \ldots, m_q)$ по всем упорядоченным разбиениям числа m на q слагаемых: $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_q$, $m_i \geq 0$. В зависимости от четности m возникает два случая. Для нечетного m все разбиения можно распределить на две группы:

1) разбиения, в которых одно слагаемое нечетно;

2) разбиения, в которых число нечетных слагаемых больше 1. Соответственно этому $B(m_1, m_2, \ldots, m_q)$ находится по формуле (1) или (2).

Сложим числа $\frac{1}{2m} \cdot \sum_d \varphi(d) \cdot P\left(\frac{m_1}{d}, \frac{m_2}{d}, \ldots, \frac{m_q}{d}\right)$ по всем разбиениям $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_q$, изменим порядок суммирования и воспользуемся формулой:

$$\sum P(n_1, \ldots, n_q) = q^n \qquad (4)$$

где суммирование распространяется по всем упорядоченным разбиениям n на q слагаемых: $n = n_1 + \ldots + n_q$ [3] (с. 9). Если m_1 нечетно, то $\left[\frac{m_1}{2}\right] = \frac{m_1 - 1}{2}$. Суммируя числа $P\left(\frac{m_1}{2}, \ldots, \frac{m_q}{2}\right)$ по всем разбиениям с нечетным m_1 и снова применяя (4), получим $q^{\frac{m-1}{2}}$. Умножая это число на q, получим

$B_{m,k} = \sum_{d|(n,k)} \varphi(d) \cdot q^{\frac{m}{d}} + \frac{1}{2} \cdot q^{\frac{m+1}{2}}$, если m нечетно.

Аналогично получается формула: $B_{m,k} = \frac{1}{2m} \cdot \sum_{d|(n,k)} \varphi(d) \cdot q^{\frac{m}{d}} + \frac{q+1}{4} \cdot q^{\frac{m}{2}}$, если m четно.

Автор выражает благодарность профессору Г.П.Кукину за постановку задачи и руководство работой.

Литература

[1] Кострикин А.И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
[2] Ширшов А.И. О свободных кольцах Ли // Матем. сб. 1958. Т. 45. N2. С. 113 - 122.
[3] Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения / Под ред. К.А.Рыбникова. М.: Наука, 1982.
[4] Калужнин Л.А., Сущанский В.И. Преобразования и перестановки. М.: Наука, 1979.
[5] Балашова Н.А., Кукин Г.П. Комбинаторика. Омск, 1992.
[6] Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1965.