

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

Джордж Грин: жизненный путь и творчество
(к 200-летию со дня рождения)

Ю.А. Любимов

Представлена биография Дж. Грина (1793—1841), известного математика и физика первой половины XIX в. Проанализированы все оригинальные работы Грина. Его исследования дали новые концепции и принципы, которые не только способствовали развитию физики прошлого века, но и оказались эффективными для прогресса физики в середине XX в.

PACS numbers: 01.60

1. Жизненный путь Дж. Грина

Творчество и деятельность выдающихся ученых всегда привлекают внимание. Это внимание возрастает, когда обстоятельства жизни и творчества исследователя не совсем обычны. Такой представляется и судьба английского физика, математика и механика Джорджа Грина. Вероятно, ни одна страна не дала столько ученых-самоучек, как Англия: Гук, Буль, Фарадей, Джоуль, Хевисайд — вот лишь некоторые из наиболее известных. Особо удивительно такое явление в фундаментальных науках — математике и физике. В значительной мере сказанное можно отнести к Грину: самые значительные свои результаты — применение теории потенциала в электричестве и магнетизме, известные "формулы Грина", "функцию Грина" он получил задолго до поступления в Кембриджский университет.

Его исследования в области математической физики (прежде всего по развитию теории потенциала) уже давно общепризнанны; ни один серьезный курс по высшей математике не обходится без формул Грина (связывающих объемный интеграл с поверхностным).

Обстоятельства жизни и творчества этого выдающегося английского ученого до сих пор мало известны, а многое остается и неясным. Как отмечает самый авторитетный биограф¹ Грина, "неясные места в его биографии и неполнота истории являются естественными следствиями обстоятельств его жизни" [1, с. 550].

Род Гринов издавна (приблизительно с XIV в.) проживал в шести милях от г. Ноттингема, в деревне Саксондал; его представители были фермерами-арендаторами. Ферма не могла прокормить трех братьев, и

самому младшему из них — Джорджу (впоследствии отцу будущего ученого) в пятнадцатилетнем возрасте пришлось стать учеником пекаря в Ноттингеме². Ученичество продолжалось 7 лет, после чего Джордж Грин стал полноправным гражданином города Ноттингема, включая право голоса на парламентских выборах. Мать будущего физика и математика — Сара Батлер родилась в 1770 г.; она была дочерью пекаря Вильяма Батлера и его жены Мэри (урожденной Брюстер); ее родители происходили из фермеров, живших в деревне Радклифф-на-Тренте, также неподалеку от Ноттингема.

Джордж Грин появился на свет в г. Ноттингеме, по всей видимости, не ранее начала июня и, безусловно, не позднее 14 июля 1793 г. К сожалению, нет объективных данных для точного указания дня его рождения; обычно фигурирующая в литературе [2, с. 124; 3, с. 150] дата рождения — 14 июля соответствует дню его крещения. Правда, уже упоминавшийся биограф Грина [1, с. 552] отмечает, что нельзя исключать вероятность крещения сразу же после рождения: такое иногда практиковалось, если возникали серьезные сомнения в жизнеспособности новорожденного. Примечательно, что и точного места рождения также не удается установить: Джордж родился, вероятно, в доме своих родителей на углу Мейнелл Роу и Миллстоун Лэйн, хотя не исключено его появление на свет и в доме родителей матери, находившемся на Вестшеар Ярд.

Отец Джорджа Грина, тоже Джордж, женился на Саре Батлер в 1791 г. От этого брака, кроме Джорджа, будущего математика и физика, родилась еще его сестра Энн в 1795 г.³; впоследствии Энн вышла замуж за Вильяма Томлина, сыгравшего некоторую роль в жизни Дж. Грина.

Ю.А. Любимов. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, 117234, Москва, Ленинские горы.
Тел. (095) 939-43-88

Статья поступила 16 июня 1993 г.

¹ По случайному совпадению его однофамилец: Гвинед Грин.

² Очевидно, профессия пекаря была тогда весьма престижной, поскольку за обучение Джорджа мастеру было уплачено целых 10 гиней [4].

³ Другая дочь умерла в восьмимесячном возрасте.



Вид на р. Трент [4]

Когда Джордж Грин старший переселился в 1774 г. в Ноттингем, это был тихий и живописный провинциальный город. Вот как описывал его один из современников: "Обстановка не отличается заметным образом от других мест в Англии, и на центральных улицах много красивых домов с высокими колоннами на фасадах, что делает их очень импозантными. Улицы широки, открыты и хорошо мощены... Многие весьма обеспеченные джентльмены поселяются здесь, что неудивительно благодаря видам, открывающимся от улиц на окрестные поля, а излучины Трента столь восхитительны, что это даже трудно представить".

В это же время в Англии начинается интенсивный рост промышленности; для Ноттингема он обернулся развитием трикотажно-чулочного и перчаточного производств. Потребность в рабочих руках вызвала приток людей, так что с 1741-го по 1801 г. население возросло почти втрое и составило около 30 тысяч жителей; к 1841 г. население превысило уже 53 тысячи. Существенно, что в силу ряда социальных причин размеры городской территории почти не изменились, и Ноттингем из зеленого города превратился в конгломерат фабрично-заводских зданий, боен, свалок, по большей части некомфортных жилых домов и просто трущоб. Исчезновение садов и зелени сопровождалось сильным загрязнением воздуха и ухудшением качества питьевой воды. Естественно, рост народонаселения стимулировал расширение торговли зерном, развитие мукомольного и пекарного производств. Процветание мельников и пекарей обуславливалось как расширением их производств, так и возрастанием цены на хлеб, особенно усилившимся во время войн с Наполеоном и континентальной блокады. Удорожание жизни вызывало социальную напряженность в низах городского населения, прорывавшуюся в волнениях и беспорядках. Так, в 1800 г., после резкого удорожания хлеба толпы бедняков учинили разгром амбаров на пристанях по реке Трент и ряда булочных; пострадал в числе других и дом семейства Гринов. Позднее не обошли стороной Ноттингем и волнения луддитов...

Жизнь юного Джорджа, однако, протекала довольно безоблачно между родительским домом и жилищем его деда В. Батлера, а также на природе, на берегах Трента. Но эта идиллия вскоре закончилась: в марте 1801 г. Джордж стал учеником одной из средних школ, где обучался до лета 1802 г.⁴ Как ни удивительно, но это краткосрочное обучение 8—9-летнего мальчика оказалось весьма плодотворным благодаря Роберту Гудакру.

Этот двадцатипятилетний директор школы сумел резко повысить уровень преподавания. Есть сведения [4], что ему удалось заинтересовать маленького Джорджа математикой и естествознанием либо поддержать в нем уже проявившиеся склонности к этим предметам. Перу Гудакра принадлежал ряд школьных учебников по арифметике и вопросам образования. К сожалению, школьные занятия вскоре прекратились, поскольку Грин старший решил сделать сына своим помощником в пекарне. Правда, по свидетельству В.Томлина, благодаря математическим способностям юный Грин "быстро обогнал своих учителей, и поэтому его посещение школы прекратилось в раннем возрасте" [1, с. 554]. Судя по всему, семейное дело процветало, поскольку вскоре отец Грина берет себе еще двух учеников.

В 1807 г. отец Грина приобретает участок земли с ветряной мельницей в местечке Снейнтоне (находящемся в нескольких милях от Ноттингема) и, соответственно, меняет свою профессию⁵. Еще раньше и почти до кончины отца (в начале 1829 г.) Дж. Грину приходилось помогать ему сначала в пекарне, а затем на мельнице. По некоторым косвенным, но достаточно надежным сведениям, ему это давалось нелегко. Известно, что в это время Джордж уже не посещал школу. Ему пришлось заняться самообразованием. Вечерами, днем, урывками между делами на мельнице Джордж упорно расширяет свои знания. Очевидно, крен при этом направлен прежде всего в математику, механику, а также в физику. Что же он изучает? Есть список книг, которыми он пользовался; здесь Лаплас "Система Мира", его же тома "Небесной механики" (особенно первый — "Аналитическая механика"), труды Лагранжа, курсы по математике и механике английских авторов, а также полная подборка годовых комплектов "Трудов" Английского Королевского общества со дня основания и до конца XVIII в. При этом Грин пользовался английскими переводами трудов Лапласа, Лагранжа; Био, а затем Кулона, Пуассона он, судя по всему, читал в оригинале. Неясно, получил ли он в достаточной степени знания во французском языке еще в средней школе? Судя по кратковременности обучения, возможно, и нет. Стало быть, и французский пришлось изучать самостоятельно.

Некоторые авторы, пишущие о Грине, настойчиво подчеркивают провинциальный характер его родного города. Да, действительно, Ноттингем, по масштабам Англии XIX в., удален от столицы, но Кембридж и Оксфорд были к нему ближе, чем Лондон. И, вообще, как известно, провинциальность не географическое понятие. В Ноттингеме той поры было много средних школ; многочисленны памятники архитектуры, в том числе старинные храмы. В помещении городского Королевского театра систематически проводились циклы публичных лекций.

Усилиями значительной группы энтузиастов в 1816 г. была открыта в Ноттингеме публичная библиотека (по подписке), фонды которой содержали и лучшую научную литературу того времени. Позднее эта библиотека сыграет большую роль в жизни самого Грина. Он не только будет пользоваться ее книгами; та же группа энтузиастов, объединению которых способствовало от-

⁴ Сохранился список учеников этой школы за 1801—1802 гг., где за № 255 значится Джордж Грин.

⁵ Согласно [4] до 1817 г. отец Грина продолжал еще заниматься пекарным делом.

крытие упомянутой библиотеки, поможет Грину в издании его первого, самого большого и значительного научного труда "Опыт приложения математического анализа к электричеству и магнетизму". Произошло это в 1828 г. Сейчас трудно установить общее число подписчиков: в приводимом списке [1, с. 589—591] значится около 40 имен; однако в ряде пунктов списка после фамилии очередного подписчика стоят слова "и многие другие". Среди поддержавших Грина своим участием в подписке — предприниматели, врачи, учителя, священнослужители и лица других профессий. Ясно, что профессиональный интерес к самому "Опыту" мог быть только у очень немногих — подавляющее же большинство подписавшихся просто стремилось помочь Грину: они верили в своего земляка. Судя по всему, издать этот труд было непросто: необходимые математические знаки — литеры типографского набора удалось найти лишь в Лондоне. Тираж был небольшим — порядка сотни экземпляров. Большинство их рассеялось по домам его друзей-подписчиков. Когда В. Томсон (впоследствии лорд Кельвин) менее чем через 20 лет попытался достать это издание, найти его удалось лишь с большим трудом⁶.

В начале 1829 г. в возрасте 70 лет умирает отец Дж. Грина; матери Грин лишился еще раньше — в 1825 г. Вести семейный бизнес (мельничное дело) стало затруднительно еще ранее, в последние годы жизни его отца, когда тот стал серьезно жаловаться на здоровье. После кончины отца Грин решает прекратить работу мельника и реализует часть полученного наследства (отметим, что, вопреки встречающимся иногда утверждениям, он не продал мельницу, которая продолжала оставаться во владении семьи Гринов до 1919 г.). У нас нет сведений, как проходила жизнь Грина в последующие годы. Какое-то время заняло улаживание имущественных дел, а также и личная жизнь, которая не была лишена сложностей... Но было и иное: Грин приходит к решению поступить в университет. Это решение было принято по совету баронета Эдварда Френча Бромхеда, активно его поддерживавшего⁷.

В октябре 1833 г. Грин поступает в колледж Гонвилла и Кайюса, бывший одним из старейших в Кембридже (основан в 1348 г.). Само собой разумеется, выбор как университета, так и самого колледжа сделан также по рекомендации сэра Бромхеда, который в свое время был питомцем этого колледжа⁸. Для поступления в университет Грину пришлось интенсивно заниматься, в особенности гуманитарными дисциплинами (в частности, латинским и древнегреческим языками), которым он прежде не мог уделять должного внимания. Но, кроме того, Грин продолжает научные исследования, подготавливая три статьи, впоследствии опубликованные в "Трудах" Кембриджского Философского общества. Не отвлекаясь сейчас на их анализ, отметим только, что в первых двух работах был проведен весьма общий анализ взаимного притяжения тел, с одной стороны, когда силы притяжения зависят от расстояния обратно пропорционально некоей произво-



Мельница отца Дж. Грина в Снейнтоне (с гравюры начала XIX в.) [4]

льной степени расстояния между ними (не обязательно квадрата), а с другой стороны — для любой размерности самого пространства (где действуют упомянутые силы). Третья работа была посвящена колебаниям маятника в жидкости; как выяснилось потом, ею начинался цикл исследований волновых процессов в акустике и оптике.

Сохранилась регистрационная запись, свидетельствующая, что Джордж Грин поступил в колледж Гонвилла и Кайюса в качестве студента, оплачивающего обучение и содержание ("пансионера") и внесшего вступительную плату в размере 3 шиллингов и 4 пенсов. Его тьютором был мистер Хансон. Через четыре года, в 1837 г., Грин блестяще сдает сложный экзамен по математике (трайпос) и становится четвертым "спорщиком" (рэнглером) в Кембридже. Одновременно он подготавливает свою очередную работу "О движении волн в переменном канале малой глубины и ширины" и читает ее в заседании Кембриджского Философского общества с последующей публикацией в "Трудах" общества⁹.

Спустя полгода, в декабре того же 1837 г. Грин представляет две следующие статьи, первая из которых посвящена отражению и преломлению звуковых волн, а вторая — подобным же явлениям для света. При внешнем изменении тематики он не меняет самого метода своих исследований, существенно основанного на использовании понятия потенциала ("потенциальной функции" по Грину).

Формально поставленная цель достигнута: университет окончен, причем блестяще, что в полной мере

⁶ В. Томсону удалось получить три экземпляра "Опыта" у тьютора Кембриджского университета Гопкинса.

⁷ Знакомство с сэром Бромхэдом состоялось в период издания "Опыта" и поддерживалось в последующие годы.

⁸ Сэр Э.Ф. Бромхэд окончил колледж Гонвилла и Кайюса, очевидно, в 1813 г.

⁹ Непременным условием публикации статей в "Трудах" Кембриджского Философского общества было их предварительное заслушивание на заседаниях общества.



Читальный зал публичной библиотеки в Ноттингеме, открытой в 1816 г. По подписке членов библиотеки был издан "Опыт приложения математического анализа" Дж. Грина (1828 г.) [9]

проявилось при сдаче трайпоса¹⁰. Однако удовлетворение от успехов, очевидно, неполное... Грину уже сорок четыре года — возраст, когда обычно ученый, особенно теоретик, не только полностью сложился, но и обрел определенное имя и положение. К сожалению, его первая, самая фундаментальная работа по электромагнетизму (1828 г.) остается совершенно неизвестной. Тем не менее Грин продолжает работать. Следующий, 1838 г. уходит на подготовку и получение степени "бакалавра искусств". Продолжается исследовательская работа: докладываются и сдаются в печать еще две статьи — о движении волн в каналах (февраль 1839 г.) и о распространении света в кристаллических средах (май того же года). 31 октября 1839 г. Джорджа Грина избирают членом (феллоу) его "родного" колледжа — Гонвилла и Кайюса¹¹. Есть сведения, что Грин принимал участие в преподавании в своем колледже, кажется, в качестве экзаменатора. Можно было бы надеяться, что, хотя и с большим запозданием, но жизнь и деятельность его как-то устраиваются...

К сожалению, этого не случилось. В здоровье Грина наступает значительное ухудшение, он отправляется в Снейнтон, чтобы уже никогда не вернуться в Кембридж... О причинах болезни Грина и ее характере нельзя сказать ничего определенного. Правда, в английском издании [4, с. 54] утверждается, что он "... умер 31 мая 1841 г. в Снейнтоне от инфлюэнцы" (т.е., говоря современным

языком, от гриппа¹²). Он похоронен рядом со своими родителями у стен церкви Св. Стефана 4 июня; по соседству покоятся и другие члены его семьи. За несколько месяцев до кончины Дж. Грин составил и оформил свое завещание, тщательно распределив имущество между детьми и Джейн Смит (см. ниже), не забыв и некоторых других близких ему лиц.

Извещения о кончине Джорджа Грина были опубликованы в трех местных газетах г. Ноттингема: "The Nottingham Journal", "Nottingham Mercury", "Nottingham Review". Текст гласил: "В Снейнтоне в понедельник вечером 31-го числа прошлого месяца [умер] Джордж Грин, эсквайр, бакалавр искусств, член колледжа Гонвилла и Кайюса, Кембридж". "Nottingham Review" поместило еще дополнительное сообщение: "В нашем некрологе на прошлой неделе сообщалось о смерти м-ра Грина, математика; как мы знаем, он был сыном мельника, проживавшего вблизи Ноттингема; однако, имея склонность к наукам, он направил свой одаренный ум на изучение математики, в которой он достиг быстрого успеха. В сэре Эдварде Френче Бромхедде он нашел сердечного друга, и его влиянию он весьма обязан обучению в Кембридже. Если бы его жизнь продолжилась, он смог бы достичь исключительно больших высот как математик". Издателем "Nottingham Review" был тогда Роберт Гудакар, сын директора школы, где учился Грин. Полагают [4], что он же написал приведенное извещение. К сожалению, приходится констатировать, что научный мир никак не прореагировал на кончину

¹⁰ Впереди Грина были В.Н. Гриффин, Д.И. Сильвестр и Э. Бруммель; среди них только Сильвестр оставил значительный след в математике.

¹¹ Такое быстрое избрание являлось традиционным признанием исключительных успехов при сдаче трайпоса.

¹² В извещениях отсутствует слово о смерти, поскольку они помещены в соответствующем разделе газет. Извещения были опубликованы в начале июня, следовательно, имеется в виду месяц май.

Дж. Грина. Время интереса к нему, время оценки его трудов было еще впереди.

Повторим, что при жизни Грина и работы его, последовавшие за "Опытом", не вызвали заметного интереса и не получили должной оценки.

Много лет спустя, вспоминая о работе Грина по электромагнетизму, Ф. Клейн позволил себе заметить: "В 1828 г. Грин создал свои первые работы по теории потенциала; однако в течение долгого времени они пребывали в совершенной неизвестности, так как Грин, сын бедного ноттингемского пекаря, на первых порах не пользовался влиянием. К сожалению, то обстоятельство, что его талант был позже открыт и извлечен на свет, не пошло ему на пользу; приглашенный в Кембридж, он стал добычей алкоголя" [5, с. 31]. Вообще, Клейн пишет о Грине со странной смесью уважения, даже почтения к его научным заслугам, и почти развязно касательно его биографии: "О самоучке Грине [...], который в 1828 г. опубликовал свою новаторскую, но поначалу мало замеченную работу [...] "Опыт применения математического анализа к теориям электричества и магнетизма", мы уже говорили. Он попал в Кембридж в сорокалетнем возрасте и опубликовал там ряд важных работ, из числа которых мы назовем лишь работу о поле притяжения эллипсоида (1835 г.); по сравнению с его выдающимися по своей важности работами по акустике и оптике исследование это обладает тем несомненным достоинством, что оно проводится сразу для n -мерного случая — задолго до того, как в Германии начался описанный выше процесс развития n -мерной геометрии" [5, с. 257].

Нельзя считать вполне приемлемым не только стиль, но и некоторые фактические сведения, сообщаемые Клейном. Грина неправильно именовать "сыном бедного ноттингемского пекаря", поскольку, во-первых, задолго до времени публикации "Опыта" его отец сменил профессию пекаря на занятие мельничным делом; во-вторых, ко времени кончины отца Грина его состояние (по оценке, данной в [1, с. 559]) составляло примерно 20 000 ф.ст. (по курсу середины XX в.); семье Гринов помимо мельницы в Снейнтоне принадлежал ряд земельных участков с домами и садами (в Ноттингеме до сих пор некий участок называют "садами Гринов"). Точно так же "самоучкой" Грина можно считать лишь отчасти, применительно к его первой работе ("Опыт", 1828 г.) и двум последующим, поскольку позднее, как отмечалось, он получил образование в Кембридже. И его никто не приглашал в Кембридж: он поступил в университет общепринятым образом.

Сейчас мы должны коснуться еще одной деликатной стороны его личной жизни. Формально Грин не был женат; однако от его неофициальной жены Джейн Смит (дочери помощника мельника) у него было семь детей, родившихся в период с 1824-го по 1840 г.: двое сыновей и пять дочерей. Среди них его сын, тоже Джордж (родился в 1829 г., умер в 1870 г.), был преподавателем математики в Кембридже. Свое отцовство Грин признавал, и его официальное подтверждение можно найти в завещании, составленном незадолго до смерти. Неясно, почему в сложившейся ситуации Грин так и не оформил официально своих отношений с Джейн Смит. На этот счет существуют две версии. Согласно одной категорически против брака был отец Грина; по другой Грин не хотел жениться вообще, поскольку он предполагал стать членом колледжа, а устав колледжей английских универ-

ситетов не допускал этого для людей, вступивших в брак. Оба эти объяснения не вполне убедительны, поскольку отец Грина умер в начале 1829 г., а намерение поступить в университет обнаруживается лишь через несколько лет. Известно, что после последнего приезда Грина в Снейнтон Джейн Смит жила у него в доме и присутствовала при его кончине. После смерти Дж. Грина его вдова Джейн (урожденная Смит) стала носить двойную фамилию Грин-Смит. Джейн Смит родилась в 1802 г. и скончалась в возрасте 75 лет. В 1919 г., не оставив после себя детей, ушла из жизни самая младшая и любимая дочь Грина Клара; с ней угас род Гринов.

Как уже отмечалось, о жизни Грина, его характере, вкусах и привычках известно очень мало; не обнаружено пока ни его портрета, ни даже словесного описания внешности. По отзывам современников Грин был скромным и вежливым человеком. Вместе с отцом длительное время состоял попечителем в благотворительном обществе Снейнтон; отец и сын не только помогали нуждающимся, но и прилагали усилия к наиболее рациональному использованию собранных средств. В 1838 г. Грин пожертвовал значительную сумму на строительство собора Св. Стефана (в Снейнтоне). Семья Гринов на парламентских выборах традиционно голосовала за партию тори¹³. До середины нынешнего века никто не позаботился о сохранении памяти о Джордже Грине¹⁴. Затем в здании мельницы был устроен мемориальный музей; факты биографии Грина с трудом восстанавливались в весьма фрагментарном виде, по архивным данным г. Ноттингема (см. [1, 4]). По счастью, архивные материалы в этом городе, как и вообще в Великобритании, находятся в идеальном порядке. Ряд сведений оказалось возможным получить в архивах и библиотеках Кембриджского университета и его колледжей. Существенны также те данные о жизни и творчестве Грина, которые удалось (и возможно еще удастся) обнаружить среди переписки ряда ученых. Помимо архивных данных, важным источником сведений являются письма самого Грина и написанные о нем; часть из них приводится в [1, 4].

Жизнь отпустила английскому ученому не так уж много времени для полноценного научного творчества. В отрочестве и в молодые годы Грин не имел возможности получить серьезное систематическое образование; почти вся его деятельность (не считая годов учения в Кембридже) протекала в провинциальном городе (Ноттингеме), что практически исключало возможность общения с научными кругами. В силу некоторых обстоятельств иногда бытует некая легенда о "сыне мельника, изучавшем Лапласа в свои часы досуга" [8, с. 236]. Увы, действительность не была столь идиллической. С горечью и вопреки традиции в предисловии к своему "Опыту" Грин писал: "... Трудность предмета побудит математиков прочитать эту работу со снисхождением, тем более заслуженным, если они будут извещены, что она написана молодым человеком, который был вынужден получить небольшие познания в такие периоды и такими средствами, когда другие необходимые занятия оставляют лишь небольшие возможности для совершенствования ума" [7, с. 8].

¹³ Парламентские выборы были открытыми.

¹⁴ Издание 1871 г. было повторено без всяких изменений в 1970 г. в Нью-Йорке; могила Грина оставалась в запущенном состоянии длительное время.

2. "Опыт применения математического анализа..."

В известных нам газетах ("Nottingham Review" от 14 декабря 1827 г. и "Nottingham Journal" от 15 декабря того же года) сообщалось, что "Опыт" уже находится в печати и уважаемых читателей приглашали подписаться на него; подписная цена составляла 7 шиллингов и 6 пенсов. За брошюру в сто с небольшим страниц — стоимость немалая (с учетом денежного курса того времени). Действительная научная ценность этого труда будет оценена спустя много лет. Около половины подписчиков были членами упоминавшейся публичной библиотеки (которую с 1822 г. стали именовать библиотекой Дома Бромлей, по имени нового владельца дома). Совершенно очевидно, Грин рассчитывал на определенный интерес к своей работе; увы, никакой реакции со стороны научного мира Великобритании не последовало. Разочарование было столь сильным, что Дж. Грин подумывал всерьез о том, чтобы вообще прекратить заниматься наукой.

Если смотреть ретроспективно, то ничего другого скорее всего и не могло быть. Действительно, никому не известный человек, даже не учившийся в университете, публикует некую работу. Кто и зачем будет ее читать? Вспомните, читатель, не приходилось ли Вам скользить взглядом по брошюрам и книгам, изданным на средства самих авторов, претендующих на решение каких-то важных научных проблем? Вызывали ли они интерес у Вас? Примерно также, очевидно, было и у Грина. И тогда требовалась значительная "энергия активации", чтобы преодолеть некий порог недоверия и предубеждения. Насколько известно, никаких усилий, чтобы "пробить" дорогу "Опыту", не предпринималось ни самим автором, ни кем-либо еще.

Нам представляется, что сама идея издания "Опыта" была разумной. Но издание нужно было рассматривать как начало ознакомления с работой, а не итог. Следовало бы попытаться довести ее содержание до сведения научной элиты страны. Впрочем, это совсем непросто: вспомним, как Коши потерял (не проявил интереса) работу своего соотечественника Гауа, и только трудами Лиувилля, через целый ряд лет математики освоили наследие юного гения.

Вернемся, однако, в 1828 г., в Ноттингем, к Дж. Грину. В это время единственным, но весьма существенным результатом публикации "Опыта" было то, что на него (и, главное, на его автора) обратил внимание уже знакомый нам сэр Эдвард Френч Бромхед, баронет из Линкольншира. Он окончил Кембриджский университет пятнадцатью годами ранее и входил в научный кружок, членами которого были Чарльз Бебедж (будущий изобретатель вычислительной машины), Джон Гершель (впоследствии известный астроном), математик Джордж Пикук и Вильям Уевелл, ставший позднее крупным естествоиспытателем и историком науки. Бебедж и его коллеги, вероятно, при поддержке сэра Бромхеда, основали в Кембридже Аналитическое общество и в 1820 г. опубликовали книгу по математическому анализу, а также перевод краткого изложения этого предмета, сделанный Лакруа. Впоследствии эти книги стали университетскими учебниками; они способствовали обогащению дифференциального и интегрального исчисления в Англии математическими идеями Континента,

а также введению в обиход принятой там системы обозначений.

Автор [8] утверждает, что "Опыт" Грина не мог попасть в лучшие руки, чем Бромхеда. Он понял его достоинства: "... Бесспорно, сэр Бромхед оказывал активную поддержку автору "Опыта". Известно, что Э.Ф. Бромхед опубликовал в "Philosophical Transactions" (1816 г.) статью "Флюэнты¹⁵ иррациональных функций", но у нас нет сведений о других его работах. Автор [9] считает, что "Сэр Эдвард не мог оценить значение "Опыта", но осознал, что Грин является человеком значительного таланта". Возможно, высказанная похвала Бромхеду в большой степени комплимент. В то же время очень трудно было бы ожидать тогда истинной оценки "Опыта"; это потребовало бы исключительно большой прозорливости. Несомненной заслугой Бромхеда остается постоянное внимание к Грину, ободрение в трудные минуты и поддержка в отношении поступления в Кембридж (см. выше).

Как уже отмечалось, "Опыт применения математического анализа к теориям электричества и магнетизма" (1828 г.) был первой, обширной и наиболее значительной работой Дж. Грина. Те, кто дал себе труд ознакомиться с этой работой в оригинале, не могут не испытывать чувства удивления: молодой человек в провинции, не получивший почти никакого образования, не имеющий руководителя, публикует труд, идеи которого намного опережают современные ему исследования как в Англии, так и на Континенте. В сущности, это первая и довольно успешная попытка построения единой теории электромагнетизма, приложимой к различным частным вопросам. В качестве "универсального инструмента" для этого Грин избирает "особую функцию", которую он назвал "потенциальной функцией". Само введение этой функции в механику и гидродинамику относится еще ко второй половине XVIII в.¹⁶ (правда, она не имела никакого специального наименования) и было предпринято в трудах Эйлера (1755—1756 гг.), Лагранжа (1773 г.) и Лапласа (1782 г.), а позднее эта функция использовалась Пуассоном также в работах по электростатике и магнетизму [11]. Однако именно Дж. Грин превратил эту функцию (позднее в науке привилось более краткое название — "потенциал", введенное в 1840 г. Гауссом) в мощный и универсальный метод; уже в своей первой работе он высказывает мысль о плодотворности использования потенциальной функции также при описании волновых процессов в акустике и оптике.

Как уже отмечалось, к исследованию электромагнетизма потенциальную функцию первым применил Пуассон (1811 г.). Он ввел, говоря современным языком, понятие ньютоновского потенциала простого слоя. В своей работе 1828 г. Грин, отталкиваясь от исследований Пуассона, идет значительно дальше. Грин записывает потенциальную функцию V точки (x, y, z) в прямоугольной системе координат:

$$V(x, y, z) = \int \frac{\rho' dx' dy' dz'}{r'};$$

здесь ρ' — плотность электричества в точке $P'(x', y', z')$, r' — расстояние от точки $P(x, y, z)$ до точки P' . Как

¹⁵ Термин Ньютона (Ю.Л.).

¹⁶ История введения потенциала (потенциальной функции) подробно изложена, в частности, в [10].

отмечается в [10], подход Грина строже, чем у Кулона и Пуассона. Под плотностью поверхностного распределения Грин понимает количество электричества на единице площади поверхности проводника. После этого Грин выводит уравнение Пуассона, полученное последним в 1811 г. Далее Грин обосновывает математически факт распределения электрического заряда только по поверхности идеально проводящих тел, что, в основном, уже исследовалось в работах Кулона и Пуассона.

Приводимые далее результаты, напротив, совершенно оригинальны и, очевидно, имеют наибольшее значение из всего, созданного Гринем. Он обращается к общему случаю нескольких тел, когда уравнение Пуассона "... может дать величину ρ плотности электричества внутри какого-либо из этих тел, если они не являются идеальными проводниками, позволяя найти величину потенциальной функции V внутри них" [7, с. 23]. Прежде всего формулируется общая теорема для двух непрерывных функций координат U и V , имеющих конечные значения своих производных в любой точке внутри тела произвольной формы. Доказывается (в современных обозначениях), что если в объеме v , ограниченном поверхностью s , заданы две функции U и V , то

$$\int_v (V\Delta U - U\Delta V) dv = \int_s (V \text{grad } U - U \text{grad } V) ds, \quad (1)$$

где Δ — оператор Лапласа, ds — векторный элемент поверхности s ; это и составляет содержание так называемой второй формулы Грина. Попутно получается и первая формула Грина

$$\int_s V \text{grad } U ds = \int_v (V\Delta U + \text{grad } V \cdot \text{grad } U) dv. \quad (2)$$

Далее Грин устанавливает весьма важное соотношение, называемое сейчас "основной интегральной формулой для гармонических функций" [12, с. 286] (иногда именуемой также "третьей формулой Грина"; см., например, [13, с. 219 и далее]):

$$U(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_v \frac{\Delta U}{r} dv - \int_s (U(M) \text{grad } \frac{1}{r_{PM}} - \frac{1}{r_{PM}} \text{grad } U) ds, \quad (3)$$

где P , M — точки внутри объема v , а r_{PM} — расстояние между этими точками. Эта формула получается из второй формулы Грина (1) в предположении, что $V = 1/r$; при ее выводе Грин окружал точку P бесконечно малой сферой, разумеется, не делая предельного перехода вследствие принятого в его время уровня математической строгости. Здесь же Гринем впервые введено в обращение понятие "сингулярности" функции (в некоторой точке).

Соотношения (1), (2) наряду с рассматриваемой ниже функцией Грина представляют, очевидно, наибольшие достижения этого ученого. Еще раз подчеркнем, что подход Грина носит с самого начала более общий характер, чем у Пуассона, поскольку английский исследователь не накладывает обычно никаких ограничений на геометрию рассматриваемых тел. При этом Грин указывает, что реальные тела вряд ли могут рассматриваться как идеально проводящие, и поэтому некоторый заряд будет оставаться и внутри них; для этих условий полезно применение потенциальной функции.

В первую очередь Грин использует метод потенциальной функции для построения теории лейденской банки (т.е. электрического конденсатора) произвольной конфигурации, причем заданными полагаются лишь толщина диэлектрического слоя между обкладками банки и радиусы кривизны поверхностей обкладки. Автор показывает также, что при последовательном соединении лейденских банок не достигается выигрыша в накоплении электрического заряда сравнительно с применением одной банки. Определенный интерес представляет анализ экранирующего действия очень тонкой идеально проводящей сферы с круглым отверстием. Оказалось, что даже при довольно значительных размерах отверстия на внутренней поверхности сферы будет весьма небольшая плотность заряда.

Применение полученных общих результатов к магнетизму менее оригинально: автор сначала излагает воззрения Кулона на природу магнетизма. Затем Грин предлагает обобщить это рассмотрение на случай, когда частицы тела "не идеально проводят магнитный флюид". Грин показывает, что и здесь имеет место экранирующее действие, создаваемое полый железной сферой. Свой "Опыт" Грин завершает теоретическим анализом магнитного состояния длинных стержней, намагниченных до насыщения; показывается, что его теоретические заключения подтверждаются опытными данными Кулона (см. подробнее [14]).

Как отмечалось, появление "Опыта" в 1828 г. не привлекло к себе никакого внимания, и он стал известным в научном мире после переиздания В. Томсоном в 1850—1854 гг. Издатель подчеркнул, что, хотя за истекшее время были получены определенные результаты в том же направлении, "... "Опыт" в целом, как он теперь предлагается, по-видимому, все еще будет найден интересным". В то время еще только развивалось направление, названное позднее "теорией потенциала". Наиболее существенными были труды К.Ф. Гаусса [15]. Нередко считается, что именно "Опыт" Грина и работа Гаусса имели "... основное значение для дальнейшего развития теории" [16, с. 419]. Таким образом, хотя английский и немецкий ученые развивали свои исследования независимо друг от друга, их подход был сходным, что формально отразилось даже в близости введенных ими терминов: "потенциальная функция" Грина и "потенциал" у Гаусса; последнее наименование ввиду краткости и осталось принятым в науке. Сейчас ясно видна связь результатов Грина с работами других исследователей. Так, первая (2) и вторая (1) формулы Грина являются прямым следствием формулы Остроградского и легко из нее выводятся; впервые на это обратил внимание Дж. К. Максвелл.

3. Функция Грина и ее значение для современной физики

Функция, названная позднее "функцией Грина" (Б. Риман), была введена ее автором в "Опыте" при рассмотрении взаимосвязи между плотностью поверхностных электрических зарядов и потенциалом в произвольной точке. Как известно, со временем она стала широко использоваться в самых различных областях теоретической физики. Заметим, что введение этой важной функции изложено самим Гринем не вполне ясно [7, с. 30—39];

приведем рассмотрение [16], наиболее близкое к оригинальному. Вторая формула Грина (1) записывается сначала для $V = 1/r$ (где r — расстояние от полюса P , находящегося внутри тела, до точки M , в которой определяется потенциальная функция), а затем принимая, что V есть некоторая гармоническая функция $w(M)$. Почленное сложение двух полученных выражений даст¹⁷

$$\int_v \Delta U(1/r + w) dv - \int_s (1/r + w) \frac{\partial U}{\partial n} ds + \int_s U \frac{\partial}{\partial n} (1/r + w) ds = 4\pi U(P).$$

Выражение $G(P, M) = 1/r + w(M)$ и называется функцией Грина.

В математическом отношении $G(P, M) = 1/r + w(M)$ есть полное решение уравнения $\Delta G = -4\pi\delta(r - r')$. Первое слагаемое в G есть поле одиночного заряда в пустоте, а второе слагаемое w есть общее решение однородного уравнения $\Delta w = 0$. Здесь принимается, что функция Грина не зависит от времени. Позднее понятие функции Грина было распространено и на случай зависимости от времени.

Представляет интерес весьма наглядный, чисто физический метод "доказательства", или, точнее, обоснования, существования функции G самим Грином. Поверхность тела считается идеальным проводником, соединенным с землей, а в точке P сосредоточен единичный заряд положительного электричества. Тогда полная потенциальная функция для точки M , простирающаяся от электричества в P и от электричества, индуцируемого на поверхности точечным зарядом в P , будет определяться функцией G . В электростатической трактовке Грина $1/r$ соответствует потенциалу единичного точечного заряда в свободном пространстве, а w — потенциал поля зарядов, индуцированных на вышеупомянутой идеально проводящей поверхности тем же зарядом. Естественно, условие заземления поверхности обеспечивает обращение G в нуль в точках этой поверхности.

Хотелось бы еще раз также напомнить, что введенная Грином G -функция (названная впоследствии его именем) была для него в значительной степени "физически ощутимым" понятием, непосредственно связанным с механическими, силовыми взаимодействиями в рассматриваемой системе наэлектризованных тел; английскому ученому был свойствен чисто физический подход к проблеме. Для него, в принципе, не стоял, например, вопрос о существовании самой G -функции. Это позднее вызывало нареkania математиков: "Сам Грин обосновывал, что такая функция существует, физической очевидностью. Разумеется, статический заряд на S существует! Мы имеем здесь превосходный пример ценности и опасности интуитивной аргументации. Положительной стороной является то обстоятельство, что она привела Грина к ряду важных открытий, с тех пор надежно установленных. Негативной стороной оказывается их ненадежность, поскольку, действительно, существуют области, для которых функция Грина не существует" [13, с. 237].

Такая оценка представляется излишне строгой. Во-первых, при получении новых результатов принципиальной важности довольно затруднительно сразу же обеспечить высокий уровень математической строгости (не говоря уже о том, что сами требования этой строгости возрастали, эволюционируя с течением времени). Во-вторых, автор "Опыта" уделял внимание наличию сингулярных точек у рассматриваемой функции, вопросам единственности и т.п., хотя, разумеется, некоторые положения потребовали позднее корректировок и обоснований. Именно наполненность глубоким физическим содержанием сделала важнейшие результаты Дж. Грина столь способными к постепенным обобщениям и распространению практически на все области современной теоретической физики и механики.

Функцию Грина называют иногда еще функцией источника, а также, если рассматривается зависимость от времени, "функцией мгновенного источника", подчеркивая этим более общий смысл этой функции сравнительно с придававшимся ей автором. Она может, например, передавать распределение температуры в некотором теле (температурное поле) после того, как в заданной точке мгновенно выделилось тепло; встречаются, конечно, и многие другие трактовки функции Грина. Позднее мы еще вернемся к использованию функции Грина в наше время.

4. Последующие работы по теории электрического потенциала

К изучению электромагнетизма Грин обращался еще дважды. Его статья "Математические исследования, относящиеся к законам равновесия флюидов, сходных с электрическим флюидом, совместно с другими подобными изысканиями" [7, с. 119] представляет попытку обобщения потенциальной функции на случай, когда силовое взаимодействие (притяжение и отталкивание) между точечными телами обратно не пропорционально квадрату расстояния между ними, а имеет некоторую другую произвольную степень $n \neq 2$, которая может быть также дробным или даже иррациональным числом. Правда, во всем проводимом далее рассмотрении автор исходит из того, что n является рациональным числом. Накладываются и некоторые другие ограничения (впрочем, весьма слабые) на выбор этого числа. Грин пишет: "Если мы, кроме того, представим себе закон взаимодействия частей таким, что силы, которые происходят от него, могут стать незаметными на заметных расстояниях, изучение такого рассмотрения этих сил должно значительно упрощаться посредством такого введенного ограничения ..." [7, с. 119].

Данная работа Грина строится подобно его предыдущему труду, т.е. "Опыту", результаты которого могут, естественно, рассматриваться как частный случай при $n = 2$. И здесь Грин подчеркивает, что "... всегда предпочтительно избегать прямого рассмотрения различных сил, действующих на некоторую частицу флюида в системе, посредством введения особой функции V координат этой частицы, из дифференциалов которой непосредственно могут быть выведены значения всех этих сил". Характер изложения дедуктивный, после анализа общего метода и получения соотношений между плотностью гипотетического флюида ρ и зависящей от него потенциальной функции $V = \int \rho dv/r^{n-1}$ разбираются

¹⁷ Частная производная $\partial/\partial n$ соответствует наружной нормали.

приложения найденных результатов: установление соотношений между плотностью гипотетического флюида ρ и зависящей от него потенциальной функцией V , а также приложение выведенных выражений к различным частным случаям. Автор решает и задачу, о плотности флюида для проводящей сферы, находящейся под действием флюида, сосредоточенного в каких-либо наружных телах.

Любопытно, что вопрос о существовании сил тяготения, убывающих обратно пропорционально n -й степени расстояния между телами, рассматривался еще Лапласом в конце XVIII в. (см. [17, с. 30–32]). Затем, вскоре после опубликования второй статьи Грина, Дирихле в 1839 г. также обращается к той же проблеме рассмотрения n не обязательно равным -2 : "Кроме того, метод не ограничивается предположением, что притяжение обратно пропорционально квадрату удаления, но остается применим также для любой целой или дробной степени удаления" [17, с. 100]. Правда, вскоре автор поясняет, что будет предполагаться, что n лежит между 2 и 3. К сожалению работа Грина [7, с. 119] осталась совершенно незамеченной и его современниками, и потомками и не оказала влияния на развитие теории потенциала.

Третья и последняя работа Дж. Грина, связанная с электромагнетизмом, носит название "Об определении наружного и внутреннего притяжений эллипсоидов переменной плотности" [7, с. 187] (правда, из вводных замечаний и других высказываний видно, что Грин предполагал продолжить изложение еще в одной, по крайней мере, статье, но это намерение осталось неосуществленным). Грин ставит задачу о притяжении эллипсоида в наиболее общем виде: он не только совместно рассматривает оба возможных случая положения точки, в которой определяется притяжение (вне и внутри эллипсоида), но и задает в общем виде размерность пространства (s), в котором определяется плотность флюида в эллипсоиде и обусловленная ею потенциальная функция. По мнению английского автора, такой общий подход является и более простым решением задачи о притяжении эллипсоида в целом, позволяя легко получить в качестве частных случаев, например, решения для проводящей сферы и для круглой бесконечно тонкой проводящей пластины, полагая, соответственно, в первом случае $n = 2$ и $s = 3$. Во втором случае ($n = 2, s = 2$) получается решение, справедливое только в плоскости пластины. К сожалению, как отмечалось, работа не была завершена, и ее автор остановился на получении весьма общих, но достаточно сложных и трудно обозримых соотношений.

Как и предыдущая работа, это исследование Грина не было оценено ни при его жизни, ни потом. Правда, в литературе иногда встречаются краткие упоминания об этой работе [7, с. VI]. Значительно позднее две последние работы Грина по электромагнетизму были отмечены Ф. Клейном, указавшим, что английский ученый "... опубликовал (...) ряд важных работ, из которых мы отметим здесь лишь исследование о притяжении эллипсоидов (1835); это исследование представляет преимущественно математический интерес по сравнению с другими важными работами из области акустики и оптики, так как оно проведено сразу для n измерений — задолго до того, как началось (...) развитие n -мерной геометрии в Германии" [5, с. 273]. История физики свидетельствует,

что глубокие и оригинальные исследования, существенно опередившие свое время, нередко находят неожиданное плодотворное применение и развитие много лет спустя. Не исключено, что такая судьба может ожидать и исследования Грина по обобщению потенциальной функции применительно к n -мерному пространству.

Развитие математической и теоретической физики подтвердило большое значение исследований Грина по электромагнетизму. Сам английский автор хорошо понимал ценность развиваемого им метода: "Учитывая, насколько желательно подчинить расчету, в той мере, насколько это возможно, силу столь универсального характера, как электричество, и размышляя о преимуществах, которые дает при решении многих трудных задач то, что мы можем сосредоточить свое внимание исключительно на особой функции, от дифференциалов которой зависят силы, действующие на различные тела в некоторой системе, вместо того, чтобы рассеивать свое внимание, исследуя каждую из этих сил в отдельности, я сделал попытку найти какие-либо общие соотношения, существующие между этой функцией и между создающими ее количествами электричества в телах" [7, с. 6].

5. Работы Грина по гидродинамике

Тематически остальные семь работ Грина можно подразделить на две части: посвященные движению жидкости и относящиеся к распространению, отражению и преломлению акустических и оптических волн в конденсированных средах. Первую часть составляют три статьи. Самой ранней из них являются "Исследования колебания маятника в жидкой среде" (1836 г.)¹⁸. Здесь рассмотрено периодическое движение маятника в форме эллипсоида внутри жидкости под действием внешней силы; перемещения считаются малыми сравнительно с собственными размерами тела; анализируется также воздействие жидкой среды на движущийся эллипсоид. Оказывается, что уравнение движения эллипсоида внутри жидкости эквивалентно его уравнению движения в вакууме, если принять, что плотность эллипсоида увеличивается на некоторую величину, зависящую, в частности, от размеров и ориентации осей эллипсоида. При вырождении эллипсоида в сферу указанное кажущееся приращение плотности равно половине его первоначального значения. Увы, касательно данной работы мы вынуждены отметить, что она не была замечена при жизни автора и не оценена впоследствии. Это тем более достойно сожаления, что в изложенной работе, вероятно, впервые был поставлен вопрос о явлениях, связанных с обтеканием жидкостью тела достаточно сложной конфигурации¹⁹.

Две остальные работы Грина в области гидродинамики: "О движении волн в канале малой переменной ширины и глубины" (1838 г.) и "Замечания о движении волн в каналах" (1839 г.) рассматривают распространение одиночных волн малой амплитуды в несжимаемой жидкости, заполняющей бесконечно длинный канал. Грин, по-видимому, первым обратился к теоретическо-

¹⁸ Доложена 16 декабря 1833 г.; опубликована в "Transactions of the Royal Society of Edinburgh".

¹⁹ Задача о движении цилиндра под поверхностью тяжелой жидкости была поставлена Кельвином в 1904 г. и стимулировала ряд последующих работ (подробнее см. [18]).

му рассмотрению одиночных (или "уединенных") волн, которые теперь называют "солитонами". Автору удалось показать, что скорость распространения волны пропорциональна квадратному корню из произведения глубины жидкости в канале на ускорение силы тяжести, а высота (амплитуда) волны обратно пропорциональна произведению квадратного корня из ширины канала на корень четвертой степени из его глубины.

Во второй статье (1839 г.) Грин отмечает очень хорошее согласие его расчетов скорости распространения волны с экспериментальными результатами Дж.С. Рассела для различных значений глубины жидкости (когда амплитуда волны много меньше глубины жидкости в канале). Заслугой Грина, в частности, является учет конечности глубины жидкости. Для бесконечно большой глубины жидкости еще Ньютоном было получено значение скорости волны $v = (g\lambda/2\pi)^{1/2}$ (λ — длина волны); более строгая теория Грина с учетом влияния глубины слоя жидкости дает примерно 25 %-ное возрастание величины v в согласии с опытом. В заключение, Грин, рассматривая движение частицы жидкости в канале при прохождении волны, показывает, что частица совершает круговые движения в вертикальной плоскости, так что она движется вперед при подъеме жидкости и назад — при опускании, оставаясь в целом на прежнем месте после прохождения волны.

Результаты данных исследований Грина оставили определенный след (см. [18, с. 224]). Л.Н. Сретенский анализирует данный вопрос чисто математически, рассматривая интегрируемость "уравнения длинных волн в каналах переменного сечения"; упомянутую выше взаимозависимость между амплитудой волны, сечением канала и его глубиной ряд авторов называет "законом Грина" [18, с. 224—227]. Результаты Грина нашли продолжение в работах Эйри (1845 г.), а позднее — Буссинеска и Рэлея; однако точное решение задачи было получено лишь в 40-х годах XX в. М.А. Лаврентьевым.

6. Исследования в области акустики и оптики

Обратимся теперь к работам Грина по распространению звука и света, сопровождающемуся переходом из одной среды в другую. Статья "Об отражении и преломлении звука" (1838 г.) явно инспирирована работой Пуассона "Мемуар о движении в двух упругих жидкостях, находящихся друг над другом" (1831 г.) и, очевидно, статьей того же автора "Мемуар о распространении движения в упругих средах" этого же года, являющегося продолжением первой работы. Хотя английский исследователь обращается к той же проблеме, что и его французский коллега, и даже пользуется теми же обозначениями, подход у них различен. В начале своей работы Грин отмечает ошибочность некоторых результатов Пуассона, предлагая свой путь анализа посредством потенциальной функции; кроме того, подход английского ученого шире, поскольку рассматривается случай как упругих, так и неупругих сред. Трудно не согласиться с Грином, когда он отмечает, что опасность ошибок в ходе длительных вычислений "внушила мне мысль, что при использовании более простого метода мы могли бы прийти к некоторому полезному результату, который легко мог бы быть упущен в более сложном исследовании" [7, с. 233].

Грин рассматривает распространение плоской волны с переходом из одной бесконечно протяженной среды в другую, также бесконечно протяженную, что, естественно, сопровождается появлением отраженной и преломленной волн на границе раздела. Важным аспектом здесь является анализ полного внутреннего отражения звуковых волн (по аналогии с оптикой); такое рассмотрение уже было выполнено Пуассоном. Вполне оригинальным у Грина является предположение, подтвержденное расчетом, что и при полном внутреннем отражении происходит проникновение звуковой волны во вторую среду, но эта волна очень быстро затухает.

Н.М. Феррерс, издатель трудов Грина [7, с. VII] полагает, что работу по отражению и преломлению звука следует анализировать совместно со статьей "Об отражении и преломлении света на общей поверхности двух некристаллических сред" (1838 г.), которая также посвящена волновым процессам в изотропных средах (например, жидкостях), но уже оптически. Автору для объяснения распространения поперечных колебаний через светоносный эфир оказалось необходимым исследовать уравнения движения в упругом твердом теле.

Грин отталкивался от работы Коши: "Г-н Коши был, по-видимому, первым, кто полностью осознал полезность применения к Теории Света таких формул, которые представляют движение системы молекул, действующих друг на друга посредством сил взаимного притяжения и отталкивания; всегда предполагается, что при взаимодействии любых двух частиц частицы могут рассматриваться как точки, находящиеся под действием сил, направленных вдоль прямой линии, их соединяющей" [7, с. 245]. Однако Грин предпочитает не связывать свои рассуждения какими-то конкретными представлениями и моделями: "... Более безопасным методом было бы взять за основу наших рассуждений некоторый общий физический принцип, чем принимать некоторые конкретные способы действия, которые, к тому же, могут сильно отличаться от механизма, используемого природой ..." [7, с. 245].

В качестве общего подхода Грин выбирает хорошо известные ему (по "Аналитической механике" Лагранжа) принцип Д'Аламбера и принцип виртуальных скоростей. Одновременно применяется и потенциальная функция (используемая Грином во всех его работах): "Принцип, выбранный нами в качестве основы для рассуждений, состоит в следующем: каким бы образом ни взаимодействовали элементы любой материальной системы, если все действующие внутренние силы умножить на величины, обратные смещениям этих элементов, их полная сумма для любой взятой части массы [системы] всегда будет полным дифференциалом некоторой функции" [7, с. 245]. Существование полного дифференциала $d\Phi$ некоторой функции Φ Грин обосновывает, исходя из невозможности перпетуум мобиле: "В самом деле, если величина $d\Phi$ не была бы полным дифференциалом, было бы возможно вечное движение, и мы имели бы все основания полагать, что в природе силы таковы, чтобы это оказывалось естественным образом невозможным" [7, с. 248—249].

Грин рассматривает некую частицу эфира и пишет соответствующее уравнение движения (суммарное для всей рассматриваемой системы). В общем случае при движении произвольный элемент объема среды (представляемый первоначально прямоугольным параллеле-

пипедом) изменит свои размеры и форму; по ходу работы Грин использует то обстоятельство, что любые деформации среды можно рассматривать как совокупность сжатия (растяжения) и кручения. Искомая потенциальная функция Φ при этом будет зависеть от 6 переменных (три от компонент растяжения и три от направляющих косинусов, определяющих кручение элемента объема). Дальнейший расчет показывает, что Φ может быть представлена в виде однородной формы второго порядка, содержащей 21 коэффициент. Это уже является существенным достижением Грина, поскольку математический анализ такой ситуации другими авторами приводил к 36 параметрам. Реальные значения (и количество) этих коэффициентов определяются свойствами рассматриваемой среды. Так, в случае среды, симметричной относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей, число коэффициентов уменьшается до 9, у среды с одной осью симметрии — до 5, а для изотропной (или некристаллической) среды составляет 2. Именно этот простейший случай Грин и рассматривает далее в данной работе.

Грин не отрицает сходство своего метода с предложенным ранее Коши, но подчеркивает преимущества собственного подхода: "Метод, даваемый в тексте, который очень похож на метод, используемый г-ном Коши, однако, не только много проще, но и имеет преимущество, предоставляя два промежуточных результата, которые могут быть использованы при случае в будущем" [7, с. 253]. Далее Грин получает граничные условия на поверхности соприкосновения двух изотропных сред при выводе уравнения движения для распространения возмущения при переходе через упомянутую поверхность соприкосновения. Короче говоря, английский исследователь устанавливает, что напряжение на поверхности соприкосновения (равно как и смещение) должно быть непрерывно. В конечном итоге, из соотношений, полученных Грином, может быть выведено уравнение, сходное с волновым (оно приводится в [19, с. 237], но сам Грин до него "не доходит").

Ранее Пуассон (1828 г.) показал, что в упругой среде возмущение распространяется посредством волн двух видов — поперечных и продольных. В поперечных волнах плотность среды остается постоянной, и происходит только смещение одних частей относительно других; в продольных же распространяется волна сжатия — разрежения. Френель, однако, показал, что световые волны обусловлены только поперечными колебаниями. Предстояло, следовательно, объяснить отсутствие продольных волн в оптике.

Попытка подобного объяснения содержится в рассматриваемой работе Грина. Он исходит из того, что уравнение движения в эфире содержит две постоянные, A и B , причем скорость продольной волны пропорциональна \sqrt{A} , а поперечной — \sqrt{B} . Перед Грином две возможности исключения продольной волны: предположить отношение скоростей (т.е. \sqrt{A}/\sqrt{B}) равным нулю или бесконечности. При этом из условия стабильности среды приходится выбрать второй вариант. Такое заключение не отрицает самого существования продольных волн; оно означает только, что отношение сопротивления сжатия к сопротивлению изгибу весьма велико. Это заключение придавало известную правдоподобность гипотезе эфира. Физики со времен Ньютона стремились как-то представить себе эфир наглядно, как-

то его "смоделировать" в виде некоей, пусть искусственной, но имеющей черты реальности конструкции.

Концепция Грина позволила достичь определенного правдоподобия и наглядности в теории эфира: получалось, что, считая сопротивление эфира кручению исключительно малым, можно принять для сопротивления сжатию достаточно небольшую величину (как у разреженного газа), чтобы получить очень большие значения для \sqrt{A}/\sqrt{B} . Это объясняло то обстоятельство, что эфир не препятствует заметным образом, например, движению планет. Тем не менее некоторые ученые так и не смогли представить себе среду, достаточно жесткую для поперечных колебаний и, одновременно, не создающую сопротивления медленному движению планет.

Существенным достоинством работы Грина было то, что в отличие от Коши он не стремился получить из дифференциальных уравнений движения соотношений Френеля (для преломленной и отраженной волн); при этом граничные условия попросту "подгонялись под нужный результат". Грин же, напротив, условия на границе раздела двух сред получал в процессе вывода уравнения движения для случая распространения возмущения в эфире при переходе через границу двух сред. Грин естественным образом, полагая непрерывность смещения эфира на границе раздела сред, находит, что и напряжения на границе также должны быть непрерывными. После этого, впервые установив правильные граничные условия, Грин исследует законы отражения и преломления световых волн, выводит френелевские законы для плоских волн, и вычисляет некоторые другие оптические эффекты (в частности, изменение фазы при отражении)²⁰.

Грин, таким образом, впервые предложил "реально работающую" теорию эфира, которая, с одной стороны, была способна объяснить ряд важных оптических явлений, а с другой, как выяснилось в дальнейшем, послужила отправной точкой построения многочисленных теорий эфира, сыгравших важную роль в развитии физики XIX и начала XX вв.

В заключительной работе по распространению волн (и последней, опубликованной Грином) "О распространении света в кристаллических средах" (1839 г.) ее автор переходит к оптике анизотропных сред. В начале упоминается принцип, декларированный в предыдущей работе (по распространению света в некристаллических средах), который, как отмечалось (см. с. 114), представляет собой принцип сохранения энергии. При этом предполагается рассмотреть и сторонние [extraneous] давления, которые не учитывались ранее. Это существенно усложняет решение задачи: "Но при этих давлениях мы были обязаны ввести шесть дополнительных коэффициентов; так что без некоторого ограничения представляется почти безнадежным вывести отсюда какие-либо следствия, которые имели бы малейшую возможность физического приложения" [7, с. 293].



²⁰ Мы не останавливаемся на "Приложении к мемуару об отражении и преломлении света" (1839 г.) [7, с. 281], рассматривающем некоторые частные вопросы.

Стремясь минимизировать необходимые ограничения, автор ограничивается рассмотрением таких сред, в которых направления поперечных колебаний всегда расположены точно на фронте волны.

Здесь Грин исходил из своей модели упругого (точнее — квазиупругого) эфира с особым образом выбранными коэффициентами упругости. Ему удалось так подобрать свойства анизотропного эфира, что результаты согласовались с теми, которые давала кристаллооптика Френеля.

На первый взгляд, данная работа содержит меньше конкретных, практических результатов, чем предыдущая. Но нельзя забывать, что работа Грина, продолжая исследования Пуассона и Коши, по сути, заложила основы кристаллооптики, поставив ее на надежный фундамент теории упругости. Попытки в этом направлении предпринимались (одновременно с Грином) Мак-Келлогом. Г.С. Ландсберг указывает (в предисловии к трудам Френеля): "Известно, что Мак-Келлог пытался (1839) найти выход из положения, рассматривая эфир как среду особого рода, потенциальная энергия которой зависит только от вращения элементов объема. Полученные им формулы для такой квазиупругой среды формально совпадают с формулами электромагнитной оптики. Однако подобный анализ оказался возможным лишь после того, как Коши и Грин развили детальную упругую теорию, причем для устранения продольной волны требовалось ввести дополнительные условия, не вытекающие из граничных условий" [19, с. 50].

Решая чисто оптические задачи о распространении света в изотропных и кристаллических телах, Грин получил результаты неизмеримо большей общности, сделав важный шаг в развитии теории упругости. "Перевоорот, который Грин произвел в элементах теории, сравним по значению с открытием Навье общих уравнений..." [20, с. 11]. Эти результаты в творчестве Грина по значимости стоят на втором месте после его "Опыта"; с Грином связан, повторим, существенный прогресс в теории упругости.

7. Влияние Дж. Грина на развитие физики

Так что же значил Джордж Грин для точного естествознания своего времени и будущего? Существуют две точки зрения. Одна из них выражается, в частности, Ф. Клейном: "Но и Грин, и Мак-Келлог по своему значению представляли собой лишь изолированные явления. Свое бесперебойное и блистательное восхождение математическая физика в Англии начала лишь тогда, когда в начале 40-х годов среди молодых талантов в Кембридже на первый план выдвинулись Стокс и Вильям Томсон" [5, с. 259]. Напротив, Э. Уиттекер полагает, что "... не будет преувеличением назвать Грина по сути дела основателем той "Кембриджской школы" естествоиспытателей, выдающимися представителями которой во второй половине XIX в. были Кельвин, Стокс, Рэлей, Клерк Максвелл, Лэмб, Дж. Дж. Томсон, Лармор и Ляв" [21, с. 153]. Историк математики Д. Стройк также считает исследование Грина "началом современной математической физики в Англии" [22, с. 234]. Нам представляется, что вторая оценка гораздо объективнее.

Только что приведенные упоминания имени Стокса неслучайны: он оказался прямым продолжателем исследований Грина в оптике, акустике и гидродинамике.

Стокс очень внимательно изучал работы Грина и высоко их оценивал. Сравнивая работы Пуассона и Грина по акустике и оптике, Стокс писал: "... Эта задача была первоначально рассмотрена Пуассоном в его тщательно разработанном мемуаре. Пуассон рассмотрел предмет исключительно общим образом, и его анализ соответственно очень сложен. Напротив, м-р Грин ограничился случаем плоских волн, случаем, очевидно включающим почти все явления, связанные с тем предметом, который представляет интерес с физической точки зрения, и, таким образом, оказался способен получить свои результаты посредством весьма простого анализа. В самом деле, мемуары м-ра Грина весьма замечательны как по элегантности, так и по простоте, с которой он достигает весьма значительных результатов" [23, с. 178]. Стокс отмечает также, что Грин первым обратился к анализу одиночных волн (впоследствии названных солитонами), наблюдавшимися в 1834 г. Дж.С. Расселом.

Грин оказал значительное влияние на творчество Рэля (которого можно отчасти считать учеником Стокса) в отношении как выбора тематики исследований, так и подхода к ним. Как Стокс, так и Рэлей часто ссылаются на Грина в своих работах. Гриновскую теорию эфира Рэлей считал наилучшей из всех предложенных. Примечательно гениальное предвидение Грина о том, что область действия межмолекулярных сил много меньше длины световой волны. Впоследствии оно было реализовано при создании теории рэлеевского рассеяния: это так называемый радиус прямой корреляции (Орнштейн и Цернике, 1914 г.; подробнее см. [24]). Творчество Грина относится к времени господства механистических взглядов. Он много сделал для развития и становления теории светоносного эфира; эти работы нашли продолжение в трудах Стокса, Рэля, В. Томсона и др.

В значительной степени именно через исследования В. Томсона и Дж. Рэля результаты Грина органическим образом вошли в обиход следующего периода развития физики, связанного с максвелловским электромагнетизмом и электромагнитной теорией света. Здесь нашли широкое применение формулы Грина и функция Грина.

Особое значение последняя приобрела, однако, уже в наше время. Как выяснилось впоследствии, он ввел в обиход совершенно новую и универсальную математическую конструкцию. Действительно, такая конструкция способна учитывать влияние любого изменения (возмущения) в некоей (условно фиксированной) точке системы в заданный момент на ситуацию в других точках той же системы в последующие моменты времени. Спустя много лет это привело к развитию теории отклика физической системы на внешнее воздействие (Кубо, Томита, 1957 г.). Еще ранее, как отмечалось, Орнштейн и Цернике (1914 г.) ввели в физику понятия прямой и косвенной корреляционных функций; хотя они обусловлены случайными, флуктуационными явлениями, но математическая конструкция и физическая сущность этих функций сходны по сути с функцией Грина. Все эти идеи взаимосвязи изменений в различных точках пространства позднее были перенесены на временную взаимозависимость процессов в некоей системе. Так родились представления о временных функциях Грина (а также о временных корреляционных функциях), что значительно расширило возможности этих методов.

Заметим, что эволюция понятия функции Грина этим не ограничивается. После внедрения методов функции Грина в классическую физику пришел черед ее введения в квантовую теорию поля и в квантовую теорию твердого тела. Разумеется, даже беглый обзор этих вопросов требует отдельного изложения, далеко выходящего за рамки данной работы.

Примечательно, что в "Физическом словаре" содержатся две статьи, посвященные отдельному изложению функции Грина для классической физики и применительно к квантовой теории [25]. Не вдаваясь в подробности, отметим, что физический смысл функции Грина существенно модифицируется (и усложняется) сравнительно с общепринятым в тех проблемах квантовой теории, когда рассматриваемые системы содержат изменяющееся число частиц, что может приводить к неоднозначности в определении функции Грина. Очень плодотворным оказывается так называемый "метод температурных квантовых функций Грина", являющийся синтезом идей статистической физики и квантовой теории поля; он используется в теории твердого тела, в ферромагнетизме и т.д. [26].

Сейчас о Грине вспоминают чаще всего только как об авторе "Опыта"; мы постарались показать, что круг его исследований и достижений был гораздо шире, а влияние на последующее развитие физики, математики и механики — значительно глубже.

Список литературы

- Green H.G. (1946) In *Studies and Essays in the History of Science and Learning*. (Eds. Ashley M.F., Schuman M.H.). (New York). P. 545—596.
- Андрианова Н.Б. (1987) В кн. *Математическое естествознание в его развитии*. (Киев, Наукова думка). С. 124.
- Боголюбов А.Н. (1983) *Математики, механики. Биографический справочник*. (Киев, Наукова думка).
- Willkins-Jones F.M. (1976) *George Green: His Family and Background, Miller Sneinton*. (Nottingham). P. 15—62.
- Клейн Ф. (1989) *Лекции о развитии математики в XIX столетии*. Т. 1. (М., Наука).
- Green G. *J. Reine und Angew. Math.* **39**, 73(1850); **44**, 356(1852); **47**, 161(1854).
- N. Ferrers (ed.). *The Collected Papers of George Green*. (Cambridge, 1871); reprinted by Chelsea, New York, 1971.
- Phillips D. (1976) *George Green: His Academic Career*. (Nottingham). P. 63—89.
- Bowley R.M., Challis L.J., Sheard F.W. (1976) *George Green: His Achievements and Place in Science*. (Nottingham). P. 7—14.
- Сологуб В.С. (1975) *Развитие теории эллиптических уравнений в XVIII и XIX столетиях*. (Киев, Наукова думка).
- Любимов Ю.А. (1985) *История и методология естественных наук. Физика*. (М., Изд-во МГУ). Вып. 31. С. 102.
- Тихонов А.Н., Самарский А.А. (1951) *Уравнения математической физики*. (М., Л., Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры).
- Kellog C.D. (1953) *Foundations of Potential Theory*. (New York).
- Любимов Ю.А. (1983) *История и методология естественных наук. Физика*. (М., Изд-во МГУ). Вып. 30. С. 101.
- Гаусс К.Ф. (1952) *Избранные труды по земному магнетизму*. (М., Изд-во АН СССР).
- Идельсон Н.И. (1936) *Теория потенциала с приложениями к теории фигуры Земли и геофизике*. (Л., М., Объед. научно-техн. изд-во).
- Lejeune-Dirichlet P.C. (1890) *Ueber die Anziehung homogener Ellipsoide*. Ostwald's Klassiker. Nr. 19. (Leipzig).
- Сретенский Л.Н. (1936) *Теория волновых движений жидкости*. (М., Л., Объед. научно-техн. изд-во).
- Ландсберг Г.С. *Огюстен Френкель (очерк жизни и творчества)*. В кн. Френкель О. (1955) *Избранные труды по оптике*. (М., Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры).
- Love A.E.H. (1927) *A Treatise of the Mathematical Theory of Elasticity*. (Cambridge).
- Whittaker E.T. (1960) *A History of the Theories of Aether and Electricity*. Vol. 1. *The Classical Theories*. (New York, Harper and Brothers).
- Стройк Д. (1969) *Краткий очерк истории математики*. (М., Наука).
- Stokes G.G. (1880) *Mathematics and Physics Papers*. (Cambridge, Cambridge University Press). Vol. 1.
- Артамонов В.Г., Любимов Ю.А. (1981) *История и методология естественных наук. Физика*. (М., Изд-во МГУ). Вып. 26. С. 134.
- Физический энциклопедический словарь* (1960) (М., Сов. энциклопедия). Т. 1. С. 494—495.
- Бонч-Бруевич В.Л., Тябликов С.В. (1961) *Метод функций Грина в статистической механике*. (М., Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры).