

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Фаза осциллятора в квантовой теории. Что это такое "на самом деле"?

Ю.И. Воронцов

*Представлен анализ современной теории фазы квантового осциллятора. Существующие подходы к проблеме фазы приводят к результатам, отличающимся не только количественно, но и качественно. Обще-принятого ответа на поставленный в названии обзора вопрос нет. Однако логично утверждение, что все предсказываемые теорией свойства фазы имеют физический смысл, если возможны соответствующие измерения. Современные методы измерения фазы заключаются в совместном (приближенном) измерении амплитуды и фазы или совместном измерении квадратурных амплитуд.*

PACS numbers: 03.65. – w, 42.50. – p, 42.50.Dv

## Содержание

1. Введение (907).
  2. Фаза классического осциллятора (909).
  3. Квантовая фаза (910).
    - 3.1. Фазовые состояния. Распределение Пегга – Барнетта.
    - 3.2. Оператор фазы Пегга – Барнетта.
  4. Операторы косинуса и синуса фазы (914).
  5. Фаза и фазовое пространство (916).
    - 5.1. Вигнеровское распределение фазы. 5.2. Иллюстрация расхождений в подходах.
  6. Операциональный подход. Методы измерения фазы (917).
  7. Квантовая разность фаз (919).
    - 7.1. Разность фаз как разность фаз отдельных мод. 7.2 Оператор разности фаз. 7.3. Операторы косинуса и синуса разности фаз. 7.4. Разность фаз и  $Q$ -функция. 7.5 Операциональное определение разности фаз.
  8. Обнаружение и оценивание сдвига фазы и разности фаз (924).
    - 8.1. Ошибки обнаружения и оценивания. 8.2. Условие достоверного различения сдвига фазы. 8.3. Различимость сдвига фаз в двухмодовых состояниях. 8.4. Симфотонные состояния в интерферометре Майкельсона.
  9. Заключение (927).
- Список литературы (928).

## 1. Введение

Казалось бы, что может быть проще понятия "фаза колебаний осциллятора". Что такое фаза колебаний,

хорошо знают школьники и студенты, знают даже профессора физики, если они не читали, что написано о фазе в квантовой теории. Не уверен в своих представлениях, скорее всего, тот, кто посвятил изучению квантовой фазы часть своей жизни. Основной вопрос, над которым физики ломали головы: фаза — это динамическая наблюдаемая (так же как координата, импульс и др.) или параметр (как, например, время).

Кроме того, в процессе изучения выявились некоторые странные неклассические свойства разности фаз двух осцилляторов. Различными путями приходили к выводу, что значения разности фаз могут быть дискретными. Однако дискретность при разных подходах получалась разной. Одновременно было доказано, что изменение разности фаз может быть непрерывным. В результате многолетних дискуссий образовалось несколько теорий квантовой фазы. При относительно больших энергиях колебаний все теории дают почти одинаковые, достаточно хорошо согласующиеся с экспериментальными результаты. Расхождения возникают, когда средняя энергия колебаний составляет единицы квантов и менее.

Цель данной работы — аналитический обзор основных подходов к проблеме фазы в квантовой теории.

Переход от классического описания к квантовому состоит в сопоставлении классическим динамическим переменным (координате, импульсу, энергии и др.) соответствующих линейных эрмитовых операторов. Почти у каждой динамической наблюдаемой нашлась канонически ей сопряженная. Трудности возникли с определением наблюдаемой, сопряженной числу квантов. Если исходить из принципа соответствия коммутатора операторов классическим скобкам Пуассона, то сопряженной числу квантов должна быть фаза. Соответственно, классической фазе логично было сопоставить линейный эрмитов оператор.

Первым такую попытку в 1927 г. сделал Дирак [1]. Представив оператор уничтожения в виде экспоненци-

Ю.И. Воронцов. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, 119892 Москва, Воробьевы горы, Российская Федерация  
Тел. (095) 939-39-03  
E-mail: yury@hbar.phys.msu.ru

Статья поступила 6 марта 2002 г.

ального разложения

$$\hat{a} = \sqrt{\hat{N}} \exp(i\hat{\varphi}), \quad (1.1)$$

он посчитал, что оператор  $\hat{\varphi}$  является эрмитовым и представляет собой искомый оператор фазы.

Исходя из матричного представления операторов  $\hat{U} = \exp(i\hat{\varphi})$  и  $\hat{U}^\dagger = \exp(-i\hat{\varphi})$ , в том же году Лондон [2] доказал, что они не являются унитарными и, соответственно, оператор  $\hat{\varphi}$  не является эрмитовым. Дирак принял это замечание и воспроизводил его в двух первых изданиях своего учебника по квантовой механике. В то же время он обратил внимание на то, что имеют место соотношения

$$[\hat{U}, \hat{N}] = \hat{U}, \quad [\hat{N}, \hat{\varphi}] = i. \quad (1.2)$$

Исходя из них, Робертсон написал соотношение неопределенности [3]

$$\Delta n \Delta \varphi \geq \frac{1}{2}. \quad (1.3)$$

Некорректность соотношения (1.3) очевидна, если иметь в виду, что значения фазы ограничены интервалом  $2\pi$ . При  $\Delta n \rightarrow 0$  неравенство (1.3) нарушается! Однако публично на эту проблему было указано лишь в 1936 г. [4].

Поток публикаций по проблеме фазы в квантовой теории начался лишь в 1963 г. [5–7] и нарастал до 1995 г. В 1991–1995 гг. печаталось до 50 статей в год. (Полный список публикаций до 1966 г. приведен в [9].) Стимулом исследований фазы были квантовые поля, генерируемые мазерами и лазерами. Снова было доказано, что оператор  $\hat{U}$  не является унитарным и что фазе невозможно сопоставить эрмитов оператор в обычном гильбертовом пространстве по причине того, что ограничен спектр собственных значений оператора  $\hat{N}$  [8]. (Доказательство Лондона своевременно не вспомнили, очевидно, потому, что в третьем издании своего учебника Дирак опустил дискуссию об операторе фазы.)

Один из способов доказательства состоит в следующем. В соответствии с определением

$$\begin{aligned} \hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle, & \hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \\ \hat{a}|0\rangle &= 0, & \hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Если представить оператор уничтожения в виде

$$\hat{a} = \hat{U}\hat{N}^{1/2},$$

то должно быть

$$\hat{U}|n\rangle = |n-1\rangle, \quad \hat{U}^\dagger|n\rangle = |n+1\rangle, \quad \hat{U}|0\rangle = 0.$$

Соответственно, будет

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger|n\rangle = |n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

но

$$\hat{U}^\dagger\hat{U}|n\rangle = \begin{cases} |n\rangle, & n = 1, 2, 3, \dots, \\ 0, & n = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Таким образом,  $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{1}$ , но  $\hat{U}^\dagger\hat{U} \neq \hat{1}$ .

Столкнувшись с трудностями при попытке ввести эрмитов оператор фазы через соотношение  $\hat{U} = \exp(i\hat{\varphi})$  в обычном гильбертовом пространстве, физики стали

предлагать самые различные пути решения проблемы фазы в квантовой электродинамике. В итоге сформировались три основных подхода к проблеме, различающихся по физическому содержанию понятия "фаза".

1. В основе первого подхода лежит представление о фазе в духе традиционной концепции фазы в квантовой электродинамике как о физическом свойстве осциллятора или моды поля. Оператор фазы считается сопряженным оператору числа квантов. При таком подходе главная проблема заключалась в преодолении препятствий, связанных с влиянием нижней границы спектра собственных значений  $\hat{N}$ . Чтобы решить эту проблему, одни предлагали фиктивное расширение  $n$ -пространства до  $-\infty$  [10], другие, наоборот, вводили оператор фазы в конечномерном ограниченном сверху пространстве возбуждений  $n \in [0, s]$  с последующим предельным переходом [11–13].

В качестве альтернативы оператору фазы вводят эрмитовы операторы  $\hat{S}$  и  $\hat{C}$ , соответствующие классическим функциям фазы  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  [6, 8]. Несмотря на отсутствие каких-либо формальных проблем, предложенный подход не пользуется популярностью из-за ряда физических следствий, не укладывающихся в традиционное представление о фазовых свойствах осциллятора. В частности, при таком подходе само определение фазы становится неоднозначным. Поскольку операторы  $\hat{S}$  и  $\hat{C}$  не коммутируют, результаты вычисления фазы через  $\arcsin$  и  $\arccos$  не совпадают. Однако традиционные представления не всегда оказываются адекватными квантовым свойствам. Поэтому данный метод описания фазовых свойств не стоит сбрасывать со счетов, тем более что в реальных экспериментах имеют дело, скорее, с  $\sin \varphi$  или  $\cos \varphi$ , чем с самой фазой.

2. Определение оператора фазы даже при первом подходе не является самоцелью. Конечная цель во всех случаях одна — создать математический аппарат для расчета результатов соответствующих экспериментов. Нужны формулы, позволяющие при заданном состоянии объекта рассчитать плотность вероятности фазы, моменты фазы и корреляционные функции. Эти формулы можно получить помимо оператора фазы и фазовых состояний, представляя фазу как параметр состояния в фазовом пространстве [14, 15, 43].

Для каждой моды вводится комплексное фазовое пространство, каждая точка которого представляет собой комплексную амплитуду  $\alpha$ . Комплексная амплитуда может быть выражена через действительные интенсивность  $I$  и фазу  $\varphi$ :

$$\alpha = \sqrt{I} \exp(-i\varphi).$$

Результаты измерений, включая одновременные корреляционные функции, можно рассчитать с помощью представляющих квантовое состояние квазивероятностей  $P(\alpha)$ - и  $Q(\alpha)$ -функций и функции Вигнера  $W(\alpha)$ . Плотность вероятности фазы определяется как маргинальное распределение совместной квазивероятности  $w(I, \varphi)$ . Недостаток метода заключается в том, что при некоторых состояниях поля рассчитанная так вероятность может быть отрицательной или вообще невозможно определить  $P$ -функцию. Для устранения этого недостатка предлагается использовать метод двойной фазовой плоскости, в котором интенсивность и фаза могут быть не действительными, а комплексными [16].

3. В квантовой теории негласно подразумевается, что каждому эрмитову оператору соответствует некоторая измеряемая физическая величина. На самом деле это не доказано (но и не опровергнуто). Поэтому представляет интерес операциональный подход, который дает как схему измерения, так и соответствующий эрмитов оператор. В обоих описанных выше подходах нет ответа на вопрос, как реализовать измерение, результаты которого соответствовали бы результатам расчетов. В первом подходе теория позволяет определить характеризующую измерение вероятностно-операторную меру [17–19], но не способ ее реализации. Не каждой вероятностно-операторной мере может соответствовать реальное измерение. На практике первичной оказывается схема измерения, физическая операция, служащая для получения желаемой информации.

При операциональном подходе физическая величина определяется как результат измерения в конкретной схеме измерения. Чтобы была возможность рассчитывать распределение плотности вероятности и других характеристик результатов измерений в данной схеме, определяют (придумывают) оператор, действующий в пространстве исследуемого объекта, для которого расчеты наилучшим образом согласуются с экспериментом. При таком подходе информация о квантовой фазе получается из экспериментальных данных так же, как при анализе классического эксперимента. Результаты измерения относятся, скорее, к системе объект–прибор, чем отдельно к объекту. Поэтому разным схемам измерения могут соответствовать различные распределения плотности вероятности "фазы" при одном и том же состоянии исследуемого объекта.

Во всех перечисленных выше подходах при описании фазовых свойств состояния используется один и тот же термин "фаза", но за ним стоит разное содержание. За одними и теми же словами "изменение фазы", "дисперсия фазы" и др. при разных подходах могут стоять различные количественные характеристики.

Что же является корректным квантовым описанием фазы гармонического осциллятора (моды поля)? Одним из критериев правильного ответа на этот вопрос должно быть соответствие квантового расчета классическому в случае квазиклассического состояния осциллятора, каковым считается когерентное состояние с достаточно большой амплитудой. Рассмотрим характеристики классической фазы.

## 2. Фаза классического осциллятора

**Свойства детерминированной классической фазы.** Колебания координаты и импульса гармонического осциллятора можно представить в виде

$$x(t) = \left(\frac{2J}{m\omega}\right)^{1/2} \cos \varphi(t), \quad p(t) = (2m\omega J)^{1/2} \sin \varphi(t), \quad (2.1)$$

где  $J$  — действие,  $\varphi(t)$  — угол. В новых переменных гамильтониан  $H = \omega J$ .

Используя скобки Пуассона, получаем

$$\frac{d}{dt} \cos \varphi(t) = \{\cos \varphi(t), H\} = \omega \sin \varphi(t), \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{dt} \sin \varphi(t) = \{\sin \varphi(t), H\} = -\omega \cos \varphi(t).$$

При условии (2.1) зависимость фазы от времени имеет следующий вид:

$$\varphi(t) = \varphi_0 - \omega t. \quad (2.3)$$

Однако если в соотношениях (2.1) поменять местами  $\sin$  и  $\cos$ , то

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t.$$

Знак зависимости фазы от времени не имеет принципиального значения. Все определяется договоренностью. В квантовой электродинамике оператор фазы вводится как фаза оператора уничтожения. Оператор уничтожения сопоставляется той части спектра колебаний, которая в комплексной форме имеет вид  $\exp(-i\omega t)$ . Этому соответствует зависимость фазы от времени в форме (2.3).

В каком интервале следует считать значения фазы? С одной стороны, в классической области можно наблюдать изменение фазы в неограниченном диапазоне значений (например, такое изменение фазы фактически показывают часы). С другой стороны, состояния осциллятора, отличающиеся по фазе на  $2\pi$ , неразличимы. Поэтому в квантовой теории логично ограничить значения фазы интервалом  $2\pi$  и вместо (2.3) использовать для фазы соотношение

$$\phi(t) = \varphi(t) + 2\pi \sum_{p=1}^{\infty} \Theta(\varphi(t) - \theta_0 + 2p\pi), \quad (2.4)$$

где  $\Theta(z)$  — ступенчатая функция, равная нулю при  $z > 0$  и единице при  $z < 0$ , а  $\theta_0$  — условная граница интервала значений фазы  $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$ . Изменение фазы во времени иллюстрирует рис. 1.

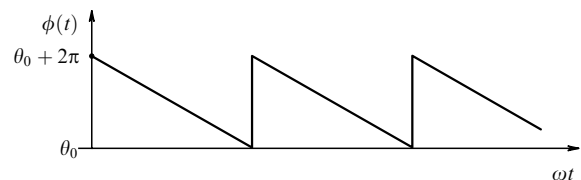


Рис. 1. Зависимость фазы от времени.

Скорость изменения фазы, определяемой соотношениями (2.4) и (2.3), имеет вид

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\omega [1 + 2\pi \delta_{2\pi}(\phi - \theta_0)], \quad (2.5)$$

$$\delta_{2\pi}(\phi - \theta_0) = \sum_1^{\infty} \delta(\phi - \theta_0 + 2\pi).$$

**Характеристики случайной классической фазы.** Плотность вероятности  $P(\phi)$  классической фазы  $\phi$  обладает следующими очевидными свойствами:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} P(\phi) d\phi = 1, \quad P(\phi + 2\pi) = P(\phi). \quad (2.6)$$

Функции  $P(\phi, t)$  в полярной системе координат можно сопоставить замкнутую в кольцо вращающуюся ленту, ширина которой пропорциональна  $P(\phi)$ .

Скорость изменения среднего значения фазы

$$\frac{d\langle\phi(t)\rangle}{dt} = -\omega[1 - 2\pi P(\theta_0, t)]. \quad (2.7)$$

В этом можно убедиться, вычислив при  $dt \rightarrow 0$  разность

$$\begin{aligned} \langle\phi(t+dt)\rangle - \langle\phi(t)\rangle &= \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} (\phi + \delta\varphi) P(\phi + \delta\varphi) d\phi - \\ &- \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \phi P(\phi) d\phi, \end{aligned}$$

где  $\delta\varphi = -\omega dt$ .

Как следует из соотношения (2.5), средняя скорость изменения фазы равна скорости изменения среднего значения фазы.

В качестве иллюстрации особенностей фазовых характеристик, связанных со скачками значений фазы при переходе через границу  $\theta_0$ , рассмотрим изменение во времени среднего значения фазы и дисперсии при свободной эволюции в случае "прямоугольной" функции распределения  $P(\phi)$  шириной  $\delta$ . Пока функция распределения не захватывает границу  $\theta_0$ , значение  $P(\theta_0) = 0$  и, соответственно,  $d\langle\phi\rangle/dt = -\omega$ , а дисперсия фазы постоянна и равна  $\delta^2/12$ .

Когда функция распределения проходит через границу отсчета, среднее значение фазы растет, дисперсия фазы сначала растет, затем возвращается к исходному значению. При этом вид функции  $P(\phi)$  не изменяется. Соответственно, вероятность нахождения значений фазы в некотором интервале  $\phi \in [\phi_1, \phi_2]$  от выбора начала отсчета фазы не зависит:

$$\int_{\phi_2}^{\theta_0+2\pi} P(\phi) d\phi + \int_{\theta_0}^{\phi_1} P(\theta_0) d\phi = 1 - \int_{\phi_1}^{\phi_2} P(\phi) d\phi.$$

Приведенный пример показывает, что дисперсия как характеристика распределения фазы малоинформативна. Использовать ее в качестве характеристики распределения фазы имеет смысл только при узком гауссовом распределении, когда значение  $P(\theta_0)$  пренебрежимо мало.

Случайное изменение фазы

$$\delta\varphi = -\int \omega dt,$$

связанное, например, с неопределенностью частоты или времени эволюции, приводит к соответствующему распределению плотности вероятности  $P_\varphi(\varphi(t))$  на бесконечном интервале значений фазы  $\varphi$ . Плотность вероятности фазы  $\phi$ , определенной в интервале  $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$ , связана с  $P_\varphi(\varphi)$  соотношением

$$P_\phi(\phi, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_\varphi(\varphi = \phi + 2k\pi).$$

### 3. Квантовая фаза

#### 3.1. Фазовые состояния.

##### Распределение Пегга–Барнетта

Вектор фазового состояния должен удовлетворять условиям (2.3), (2.6), (2.7). Кроме того, если фаза рассматривается как наблюдаемая, сопряженная числу квантов,

логично предположить, что в фазовом состоянии будет полная неопределенность числа квантов, т.е. все значения  $n$  будут равновероятны.

Перечисленным выше условиям удовлетворяют векторы, известные как фазовые состояния Сусскинда–Глоговера [6]:

$$|\theta\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(in\theta) |n\rangle, \quad (3.1)$$

которые являются собственными функциями экспоненциального фазового оператора Сусскинда–Глоговера

$$\widehat{\exp}(i\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+1|. \quad (3.2)$$

Здесь введено новое обозначение фазы  $\theta$ , чтобы в дальнейшем можно было различать величины, соответствующие различным подходам к определению фазы.

Свободная эволюция вектора  $|\theta\rangle$  задается соотношением

$$\begin{aligned} |\theta(t)\rangle &= \exp(-i\hat{N}\omega t)|\theta(0)\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(in\theta) \exp(-in\omega t) |n\rangle = |\theta - \omega t\rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Векторы  $|\theta\rangle$  обладают еще одним свойством, характерным для фазовых состояний как сопряженных  $n$ -состояниям, — равной вероятностью (полной неопределенностью) всех возможных значений числа квантов.

Если значения фазы ограничиваются интервалом  $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$ , то в соответствии с соотношением (2.4) и рис. 1 величину  $\theta(t)$  следует заменить на

$$\theta - \omega t + 2\pi \sum_{p=1}^{\infty} \Theta(\theta - \omega t - \theta_0 + 2p\pi).$$

При условии, что значения  $\theta$  ограничены интервалом  $2\pi$ , имеет место разложение единицы по состояниям  $|\theta\rangle$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\theta\rangle\langle\theta| d\theta &= \sum_{m,n=0}^{\infty} |m\rangle\langle n| \int_0^{2\pi} \exp[i\theta(n-m)] \frac{d\theta}{2\pi} = \\ &= \sum_{m,n} |m\rangle\langle n| \delta_{nm} = \hat{1}. \end{aligned}$$

Следовательно, любое состояние осциллятора можно представить в виде разложения по векторам  $|\theta\rangle$ . Если в  $n$ -представлении состояние задается формулой

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n |n\rangle,$$

то в фазовом  $\theta$ -представлении его можно представить соотношением

$$|\psi\rangle = \int_0^{2\pi} \sum_n \psi_n |\theta\rangle\langle\theta|n\rangle d\theta = \int_0^{2\pi} \psi(\theta) |\theta\rangle d\theta,$$

где

$$\psi(\theta) = \langle\theta|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \exp(-in\theta). \quad (3.4)$$

Интеграл от квадрата модуля функции  $\psi(\theta)$  равен единице:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n,m} \psi_n \psi_m^* \exp [i\theta(m-n)] d\theta = 1.$$

Таким образом, функция

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \exp(-in\theta) \right|^2 \quad (3.5)$$

обладает необходимыми свойствами функции плотности распределения вероятностей фазы  $\theta$ .

Соотношение (3.5) называют распределением Пегга – Барнетта. Оно получено, например, в [9], где функция  $\psi_n(\theta)$  определена как собственная функция оператора  $\hat{N}$  в фазовом представлении  $\hat{N} = i d/d\theta$ . Хотя результат не вызывает сомнений, такой метод определения собственной функции оператора  $\hat{N}$  в фазовом представлении ранее подвергался критике в [8], поскольку он приводит к непрерывным значениям  $n$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Соотношение (3.5) подтверждается анализом на базе оператора фазы Пегга – Барнетта (см. раздел 3.2).

Согласно квантовой теории измерений [17–21] распределение плотности вероятности результатов измерения  $\theta$  определяется состоянием объекта  $\hat{\rho}$  и вероятностно-операторной мерой  $\hat{\Pi}(\theta)$ :

$$P(\theta) = \text{Tr} [\hat{\rho} \hat{\Pi}(\theta)]. \quad (3.6)$$

Функции (3.5) соответствует

$$\hat{\Pi}(\theta) = |\theta\rangle\langle\theta|. \quad (3.7)$$

Для вычисления распределения фазы нет необходимости знать оператор фазы. Достаточно знать вероятностно-операторную меру. Физическим величинам, которым сопоставляется эрмитов оператор, в случае точного их измерения отвечают ортогональные вероятностно-операторные меры. Например, точному измерению координаты соответствует вероятностно-операторная мера  $|x\rangle\langle x|$ , точному измерению числа квантов —  $|n\rangle\langle n|$ .

Вероятностно-операторная мера  $\hat{\Pi}(\theta)$  прибавила физикам проблем в задаче определения квантовой фазы: она оказалась неортогональной. А это ставит под сомнение измеримость фазы в том смысле, который придается, например, измеримости координаты. Неортогональность вероятностно-операторной меры  $\Pi(\theta)$  обусловлена неортогональностью векторов  $|\theta\rangle$  [8]:

$$\begin{aligned} \langle\theta|\theta'\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-in(\theta-\theta')] = \\ &= \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{2} \delta(\theta-\theta') - \frac{i}{4\pi} \cot \frac{\theta-\theta'}{2}. \end{aligned}$$

Причина неортогональности очевидна — ограниченность пределов суммирования неотрицательными значениями  $n$ .

В итоге, с одной стороны, мы имеем формулу (3.5), которая, как считают авторы [9], есть все, что нужно для расчета фазовых свойств света. С другой стороны, ввиду неортогональности собственных векторов фазе невоз-

можно сопоставить эрмитов оператор. Соответственно, нельзя считать фазу  $\theta$  физической наблюдаемой в обычном смысле этого понятия.

Сказанное выше не означает, что величина  $\theta$  вообще не имеет никакого физического смысла. Во всяком случае, эту величину можно рассматривать как параметр состояния, отвечающий за фазовые свойства. Если невозможно непосредственное измерение величины  $\theta$ , то допустимо получить ее оценку путем обработки результатов измерения фазозависимых наблюдаемых. Поэтому физический смысл имеют плотность вероятности (3.5) и средние значения фазы  $\theta$  и ее функций:

$$\langle\theta\rangle = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \theta P(\theta) d\theta, \quad \langle F(\theta)\rangle = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} F(\theta) P(\theta) d\theta. \quad (3.8)$$

Средние значения фазы и квадрата фазы можно представить в виде средних значений самосопряженных операторов [22]

$$\hat{\Theta} = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \theta |\theta\rangle\langle\theta| d\theta, \quad \hat{\Theta}^2 = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \theta^2 |\theta\rangle\langle\theta| d\theta.$$

Однако в фазовом представлении оператор  $\hat{\Theta}$  не является мультипликативным оператором  $\theta \times$ , а квадрат оператора  $\hat{\Theta}$  не равен оператору  $\hat{\Theta}^2$ :

$$\hat{\Theta} \cdot \hat{\Theta} \neq \hat{\Theta}^2.$$

Если векторы (3.1), удовлетворяющие условию равномерного распределения  $n$ , не ортогональны, возможно, существуют векторы фазы, удовлетворяющие всем условиям, кроме равномерного распределения  $n$ ? Доказано (см., например, [9]), что таких векторов в обычном гильбертовом пространстве нет.

**Соотношение неопределенности число – фаза.** Правая часть обобщенного соотношения неопределенности Робертсона – Шрёдингера для любой пары эрмитовых операторов равна 1/2 от модуля среднего значения коммутатора этих операторов. В случае соотношения неопределенности число – фаза должно быть

$$\Delta\theta \Delta n \geq \frac{1}{2} |\langle[\hat{\Theta}, \hat{N}]\rangle|.$$

В то же время среднее значение коммутатора  $[\hat{\Theta}, \hat{N}] = \hbar\omega[\hat{\Theta}, \hat{N}]$  определяет среднюю скорость изменения фазы. Следовательно, если оператор фазы удовлетворяет классическому условию (2.7) для  $(d\phi/dt)$ , будет

$$\langle[\hat{\Theta}, \hat{N}]\rangle = -i[1 - 2\pi P(\theta_0)].$$

Соответственно, получаем

$$\Delta\theta \Delta n \geq \frac{1}{2} [1 - 2\pi P(\theta_0)]. \quad (3.9)$$

Как показано выше, величины  $\Delta\theta$  и  $P(\theta_0)$  являются периодическими функциями времени. Неопределенность начальной фазы  $\theta(0)$  не зависит от времени, но зависит от выбора начала отсчета фазы  $\theta_0$ . Соотношение (3.9) свободно от недостатков традиционного соотношения неопределенности (1.3). Например, поскольку считается, что при  $\Delta n \rightarrow 0$  распределение фазы стремится к равновероятному с  $P(\theta) = 1/(2\pi)$ , к нулю стремятся как левая, так и правая части соотношения (3.9).

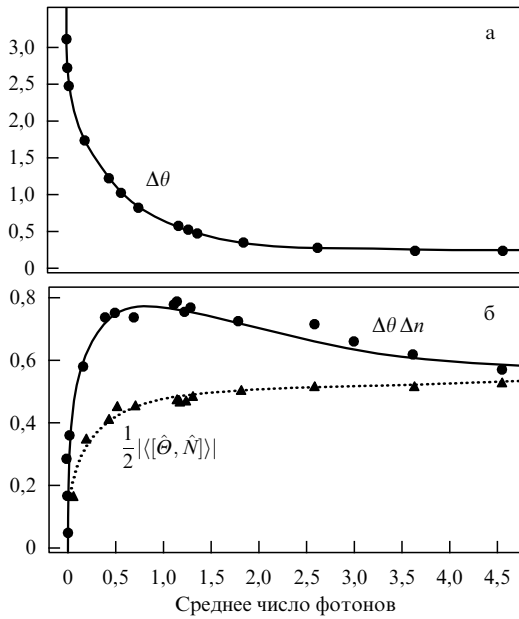


Рис. 2. (а) Зависимость дисперсии фазы от среднего числа фотонов в когерентном состоянии: точки — результаты эксперимента, сплошная кривая — расчет по формуле Пегга–Барнетта. (б) Экспериментальные и теоретические зависимости произведения неопределенностей и среднего значения коммутатора [9, 79].

Следует иметь в виду, что соотношение неопределенности Робертсона–Шрёдингера обосновано для операторов, удовлетворяющих условию  $\hat{C}\hat{C} = \hat{C}^2$  [23]. Оператор  $\hat{\theta}$  не обладает таким свойством. Следовательно, есть основание сомневаться в справедливости соотношения (3.9). Тем не менее приведенные соотношения хорошо согласуются с результатами эксперимента [79].

На рисунке 2 приведены теоретические и экспериментальные зависимости дисперсии фазы, произведения  $\Delta\theta \Delta n$  и среднего значения коммутатора от среднего числа фотонов в оптической моде в когерентном состоянии.

**Квантовые состояния с минимальной неопределенностью фазы.** Обычно под состоянием с минимальной неопределенностью понимают состояние с минимальным произведением дисперсий двух некоммутирующих наблюдаемых. Физически более естественной является другая постановка задачи: состояния с минимальной неопределенностью — это состояния, в которых минимальной является величина  $\Delta A$  при некоторых заданных параметрах (например,  $\langle B \rangle$ ,  $\Delta B$ ,  $\langle A \rangle$ ).

Как показано в [25], в результате поиска минимальных значений величины  $\Delta A$  при различных значениях  $\Delta B$  находятся решения, минимизирующие произведение  $\Delta A \Delta B$ . При этом также можно найти решения, которые невозможно получить, минимизируя непосредственно произведение  $\Delta A \Delta B$ . В русле такой постановки задачи в [26] искались состояния, которые имеют минимальную неопределенность фазы при заданных значениях среднего числа квантов и дисперсии числа квантов. В соответствии с методом множителей Лагранжа решалось уравнение

$$[\hat{\theta}^2 + \lambda_2 \hat{N}^2 + \lambda_1 \hat{N} + \lambda_0] |\Psi\rangle = 0, \quad (3.10)$$

где  $\lambda_{1,2,0}$  — множители Лагранжа,  $|\Psi\rangle$  — искомое оптимальное состояние.

При среднем числе квантов порядка единицы в результате численного решения уравнения (3.10) найдено, что равенство  $\Delta n \Delta\theta = 1/2$  для состояний с минимальной неопределенностью справедливо лишь в диапазоне  $0,5 < \Delta n < \langle n \rangle$ . Если  $\Delta n \rightarrow 0$ , дисперсия фазы стремится к асимптотическому значению  $\pi^2/3$ . При этом имеет место соотношение

$$\Delta n \Delta\theta = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \Delta n.$$

Для каждого значения  $\langle n \rangle$  существует максимальное значение  $\Delta n$ , при котором уравнение (3.10) еще имеет решение.

В случае если среднее число квантов много больше единицы, удается получить решение в общем виде:

$$\psi(x) = \psi_0 H_\nu(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad (3.11)$$

где  $\psi_0$  — нормировочный множитель,  $H_\nu(x)$  — функция Эрмита, а величина  $\nu$  определяется некоторыми дополнительными условиями [26]. При  $\Delta n / \langle n \rangle \ll 1$  распределение числа квантов близко к гауссову и  $\Delta n \Delta\theta = 1/2$  вплоть до  $\Delta n / \langle n \rangle \leq 0,3$ . При  $\Delta n / \langle n \rangle \sim 1$  распределение существенно деформируется.

В случае если неопределенность фазы минимизируется только при заданном среднем значении квантов много больше единицы, неопределенность фазы связана со средним числом квантов асимптотическим соотношением

$$\Delta\theta \approx \frac{1,376 \dots}{\langle n \rangle}. \quad (3.12)$$

Правую часть соотношения (3.11) можно считать уточненным *гейзенберговским пределом неопределенности фазы*. Соотношение неопределенности для найденного оптимального состояния имеет вид

$$\Delta n \Delta\theta \approx 0,615 \dots$$

Дисперсия фазы не является универсальной характеристикой распределения фазы. В теории известны еще четыре *меры неопределенности фазы*: обратное максимального значения (inverse of maximal value)

$$\delta_m \phi = [P_{\max}(\phi)]^{-1};$$

обратное усредненного распределения — мера Сюссмана (Süssman measure)

$$\delta \phi_s = \left[ \int_{-\pi}^{\pi} P(\phi) P(\phi) d\phi \right]^{-1};$$

модуль среднего значения фазовой постоянной

$$\delta_p \phi = \left| \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\phi) P(\phi) d\phi \right|^2;$$

энтропийная мера неопределенности

$$\delta_E \phi = - \int_{-\pi}^{\pi} P(\phi) \ln P(\phi) d\phi.$$

В [27] определены состояния, минимизирующие данные меры при условии ограниченности максимального числа

квантов. Неопределенность фазы в различных состояниях анализировалась также в [28, 30, 31, 61].

### 3.2. Оператор фазы Пегга – Барнетта

Вначале Попов и Ярунин (на их статью 1973 г. не обратили внимания) [12], Гаррисон и Вонг [11], затем Пегг и Барнетт [13] предложили ввести оператор фазы в конечномерном по  $n$  пространстве  $\Psi_s$ , в котором  $0 \leq n \leq s$ , при условии последующего предельного перехода  $s \rightarrow \infty$ . Наибольшее признание получили результаты Пегга и Барнетта [13].

Проблемы, связанные с наличием граничных значений  $n$ , исключались путем закольцовывания пространства  $\Psi_s$ . Введенный Пеггом и Барнеттом оператор  $\hat{U}_s = \exp(i\hat{\Phi}_s)$  и эрмитово сопряженный ему оператор  $\hat{U}_s^\dagger$  действуют на  $|n\rangle$  так, что

$$\hat{U}_s|n\rangle = \begin{cases} |n-1\rangle & \text{при } n > 0, \\ |s\rangle & \text{при } n = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\hat{U}_s^\dagger|n\rangle = \begin{cases} |n+1\rangle & \text{при } n < s, \\ |0\rangle & \text{при } n = s. \end{cases} \quad (3.14)$$

Если в обычном пространстве  $\hat{U}|0\rangle = 0$ , то в пространстве  $\Psi_s$  оператор  $\hat{U}_s$  переводит нулевое состояние  $|n=0\rangle$  в состояние  $|s\rangle$ , а оператор  $\hat{U}_s^\dagger$  переводит состояние  $|s\rangle$  в состояние  $|0\rangle$ . Это достигается тем, что оператор  $\hat{U}_s$  в  $n$ -представлении берется в виде [13]

$$\hat{U}_s = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2| + \dots + |s-1\rangle\langle s| + \exp(i(s+1)\theta_0)|s\rangle\langle 0|. \quad (3.15)$$

Операторы  $\hat{U}_s$  и  $\hat{U}_s^\dagger$  оказываются унитарными и, как следствие, оператор  $\hat{\Phi}_s$  — эрмитовым.

Собственные значения оператора  $\hat{U}_s$  равны

$$\theta_k = \theta_0 + \frac{2\pi k}{s+1}$$

( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), где  $\theta_0$  — произвольное начало отсчета фазы. Собственные векторы

$$|\theta_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s \exp(i\theta_k n) |n\rangle$$

являются ортонормированными:  $\langle \theta_k | \theta_m \rangle = \delta_{km}$ . Соответствующий самосопряженный оператор фазы

$$\hat{\Phi}_s = \sum_{k=0}^s \theta_k |\theta_k\rangle\langle \theta_k|. \quad (3.16)$$

Ортогональность фазовых состояний  $|\theta_k\rangle$  позволяет представить разлагаемые в степенной ряд операторные функции в виде

$$F(\hat{\Theta}_s) = \sum_{k=0}^s F(\theta_k) |\theta_k\rangle\langle \theta_k|.$$

Коммутатор  $[\hat{N}, \hat{\Phi}_s]$  отличается от дираковского и равен

$$[\hat{N}, \hat{\Phi}_s] = -i[\hat{1} - |\theta_0\rangle\langle \theta_0|].$$

Здесь единичный оператор

$$\hat{1} = \sum_{k=0}^s |\theta_k\rangle\langle \theta_k|.$$

Принципиально важно отметить, что векторы  $|\theta_k\rangle$  ортогональны только при целочисленных значениях  $k$ . Дискретность значений  $\theta_k$  связана с закольцованностью  $\Psi_s$ -пространства, и она не исчезает при  $s \rightarrow \infty$ . В обычном пространстве значения фазы непрерывны. Поэтому при любом сколь угодно большом значении  $s$  будут такие значения фазы, которые не удовлетворяют условию ортогональности. В связи с этим возникают проблемы при переходе к обычному бесконечномерному пространству. Имеет место только слабый предел [33, 58].

Последовательность операторов  $\hat{A}_s$  преобразуется к слабому пределу  $\hat{A}_w$  в  $H$ -пространстве, если

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \langle g | \hat{A}_s | f \rangle = \langle g | \hat{A}_w | f \rangle$$

для всех  $|g\rangle$  и  $|f\rangle$  из  $H$ . Слабый предел не сохраняет операторную алгебру. Например, квадрат слабого предела  $(\hat{\Phi}_w)^2$  от  $\hat{\Phi}_s$  не является слабым пределом  $(\hat{\Phi}_s^2)_w$  от  $\hat{\Phi}_s^2$ , а  $[\exp(i\hat{\Phi})]_w \neq \exp(i\hat{\Phi}_w)$ . В результате оказывается [9, 58], что два пути предельного перехода — взятие предела на последнем этапе вычислений (после всех алгебраических преобразований) и предельный переход в операторах — дают физически несопоставимые результаты.

Собственные состояния слабого предела оператора  $\hat{\Phi}_s$  не соответствуют условию равномерного распределения  $n$ , как того требует условие дополнителности. Адекватные традиционным представлениям о фазе результаты дает предельный переход только в неоператорных функциях  $\theta_k$ . Это объясняется тем, что в  $\Psi_s$ -пространстве функции дискретной переменной  $\theta_k$  являются точным представлением функции непрерывной переменной  $\theta$ .

Для оператора  $\hat{\Phi}_s$  в любой степени  $m$  имеет место слабый предел [26]:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} \langle f | \hat{\Phi}_s^m | g \rangle &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s+1} \sum_{k=0}^s \theta_k^m f^*(\theta_k) g_s(\theta_k) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \theta^m f^*(\theta) g(\theta) d\theta = \langle f | \hat{\Phi}^m | g \rangle, \end{aligned}$$

где

$$f(\theta_k) = \sqrt{s+1} \langle \theta_k | f \rangle, \quad g(\theta_k) = \sqrt{s+1} \langle \theta_k | g \rangle,$$

$$f(\theta) = \sum_0^\infty f_n \exp(-in\theta), \quad g(\theta) = \sum_0^\infty g_n \exp(-in\theta),$$

$\hat{\Phi}^m$  — слабый предел оператора  $\hat{\Phi}_s^m$ . Поскольку  $f(\theta)$  и  $g(\theta)$  не ортогональны, то, например,

$$\langle f | \hat{\Phi}^2 | g \rangle \neq \langle f | \hat{\Phi} \hat{\Phi} | g \rangle.$$

Следовательно, операторы  $\hat{\Phi}$  и  $\hat{\Phi}^2$  подобны введенным выше операторам  $\hat{\Theta}$  и  $\hat{\Theta}^2$ .

Предельные соотношения для моментов фазы имеют вид

$$\langle \hat{\Phi}^m \rangle = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \theta^m \langle \theta | \hat{\rho} | \theta \rangle d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \theta^m P(\theta) d\theta.$$

Здесь  $|\theta\rangle$  — те же векторы, что и (3.1), а плотность вероятности

$$P(\theta) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s+1}{2\pi} \langle \theta_k | \hat{\rho} | \theta_k \rangle = \langle \theta | \hat{\rho} | \theta \rangle = \text{Tr} [\hat{\rho} \hat{\Pi}(\theta)] \quad (3.17)$$

совпадает с функцией (3.6). Из предела среднего значения коммутатора  $[\hat{N}, \hat{\Phi}_s]$  в [13] найдено, что соотношение неопределенности по Пеггу – Барнетту совпадает с соотношением (3.9).

Таким образом, предельный переход в неоператорных функциях  $\Theta_k$  (т.е. после алгебраических манипуляций) подтверждает распределение (3.6). Однако попытка найти оператор фазы в  $H$ -пространстве окончилась неудачей. Слабым пределом оператора  $\hat{U}_s$  оказался неунитарный оператор Сусскинда – Глоговера (3.2).

Тот факт, что слабый предел оператора  $\hat{\Phi}_s$  не является удовлетворительным оператором фазы, усиливает убеждение, что в  $H$ -пространстве нет такого оператора; следовательно, фаза является такой величиной, которая не может быть измерена точно. Это подтверждает и анализ предельного перехода от измерения в  $\Psi_s$ -пространстве к измерению в  $H$ -пространстве [35–37].

Существующие методы измерения фазы в оптике фактически являются методами измерения не фазы, а фазозависимых величин и, как правило, сводятся к счету фотонов. Эти измерения дают информацию о распределении фазы в исходном состоянии, но не редуцируют его, т.е. не готовят состояние с меньшей (чем в исходном) неопределенностью фазы. Если бы было возможно косвенное измерение фазы, аналогичное, например, измерению координаты, то в результате измерения осциллятор перешел бы в состояние с меньшей неопределенностью фазы. Такое измерение необходимо сопровождалось бы случайным возмущением распределения квантов под действием прибора.

Оператор смещения числа квантов без изменения фазы можно представить в виде  $\exp(i\hat{y}\hat{\Phi}_s)$ , подобном виду оператора  $\hat{U}_s$ , где  $\hat{y}$  — некоторый оператор прибора. Как следует из условий (3.13), даже при малых значениях неопределенности  $y$  (малой точности измерения) возможно возбуждение высоких уровней  $n$  путем переброса через  $n = 0$ .

Другими словами, после приближенного измерения фазы  $\hat{\Phi}_s$  могут оказаться возбужденными уровни вблизи  $n \approx s$  (рис. 3). Вероятность такого возбуждения не изменяется при  $s \rightarrow \infty$ . Предельный переход в функции  $P_s(n|\hat{\Theta})$  апостериорного распределения  $n$  не исключает это физически абсурдное возбуждение бесконечно высоких уровней энергии при приближенном измерении фазы. Устранить этот эффект можно только одним путем — запретить переброс через границы. Но так мы вернемся к

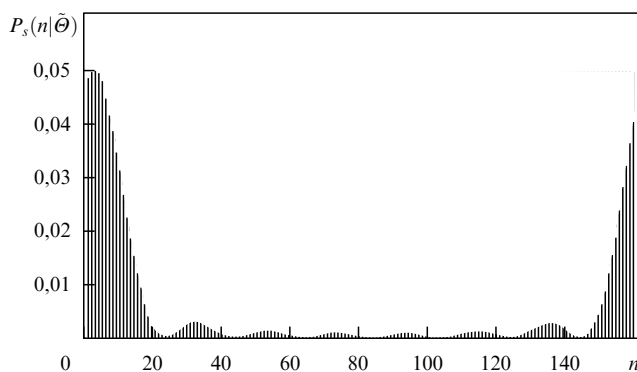


Рис. 3. Распределение  $n$  после невозмущающего измерения фазы в закольцованном  $\Psi_s$ -пространстве ( $s = 160$ ) [37].

первоначальной неразрешимой проблеме эрмитова оператора фазы.

Проведенный анализ показывает, что оператору фазы Пегга – Барнетта фактически нельзя сопоставить реальную физическую наблюдаемую. Это согласуется с выводом об отсутствии эрмитова оператора фазы в  $H$ -пространстве.

#### 4. Операторы косинуса и синуса фазы

Дискуссии физиков вокруг оператора фазы незаслуженно отодвинули в тень предложенные еще в 1964 г. Сусскиндом и Глоговером эрмитовы операторы  $\hat{C}$  и  $\hat{S}$ , соответствующие косинусу и синусу фазы [6, 8]. Эти операторы не пользовались успехом у физиков, возможно, потому, что некоторые их следствия противоречат укоренившимся в сознании многих представлениям, что в фоковом состоянии (в том числе в вакуумном) фаза полностью не определена (т.е. все ее значения равновероятны) и все моменты  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  полностью соответствуют распределениям фазы.

Однако квантовый мир "в лице гармонического осциллятора" преподносит немало сюрпризов нашему классическому мировосприятию. Сейчас уже как само собой разумеющееся воспринимается физиками дискретность уровней энергии осциллятора и определенное значение энергии в вакуумном состоянии. Следствием этой определенности (или, наоборот, причиной) является стопроцентная антикорреляция между квадратом координаты  $x^2$  и квадратом импульса  $p^2$  и совершенно не объяснимое с классической точки зрения отрицательное среднее значение оператора, соответствующего классическому произведению  $x^2 p^2$  [38]. Поэтому вполне закономерно предположить, что некоторые фазовые характеристики в вакуумном и других состояниях не соответствуют традиционным представлениям.

Способ определения и характеристики операторов  $\hat{C}$  и  $\hat{S}$  подробно описаны в [8]. Приведем с некоторыми вариациями их краткое изложение. В качестве отправных представлений мы используем соотношения (2.2). Операторы  $\hat{C}$  и  $\hat{S}$  определим как операторы, для которых замена скобок Пуассона коммутатором дает ту же самую алгебраическую структуру, что и сами скобки. Следовательно, должно быть

$$\dot{\hat{C}} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{C}, \hat{H}] = \omega \hat{S}, \quad \dot{\hat{S}} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{S}, \hat{H}] = -\omega \hat{C}, \quad (4.1)$$

что равносильно соотношениям

$$[\hat{C}, \hat{N}] = i\hat{S}, \quad [\hat{S}, \hat{N}] = -i\hat{C}. \quad (4.2)$$

Операторы  $\hat{C}$  и  $\hat{S}$  подчиняются обычным уравнениям для нормальных мод колебаний

$$\ddot{\hat{C}} + \omega^2 \hat{C} = 0, \quad \ddot{\hat{S}} + \omega^2 \hat{S} = 0. \quad (4.3)$$

Эти уравнения не имеют единственного решения. В [6, 8] использовалось решение

$$\hat{C} = \frac{1}{2}(\hat{E}_- + \hat{E}_+), \quad \hat{S} = \frac{1}{2i}(\hat{E}_- - \hat{E}_+), \quad (4.4)$$



где

$$\hat{E}_- = (\hat{N} + 1)^{-1/2} \hat{a} = \hat{a} \hat{N}^{-1/2}, \quad (4.5)$$

$$\hat{E}_+ = \hat{a}^\dagger (\hat{N} + 1)^{-1/2} = \hat{N}^{-1/2} \hat{a}^\dagger. \quad (4.6)$$

Операторы  $\hat{E}_\pm$  тождественны фазовым операторам Сусскинда и Глогера (3.2):  $\widehat{\exp}(\pm i\phi)$  [6]. Они не унитарны (по причине ограниченности значений  $n$ ):

$$\hat{E}_- \hat{E}_+ = 1, \quad \hat{E}_+ \hat{E}_- = 1 - \hat{P}_0, \quad \hat{P}_0 = |0\rangle\langle 0|. \quad (4.7)$$

Тем не менее операторы  $\hat{C}$  и  $\hat{S}$  определенно эрмитовы:  $\hat{C} = \hat{C}^\dagger$  и  $\hat{S} = \hat{S}^\dagger$ , поскольку  $\hat{E}_\pm = \hat{E}_\pm^\dagger$ . По причине неунитарности операторов  $\hat{E}_\pm$  операторы  $\hat{C}$  и  $\hat{S}$  не коммутируют:

$$[\hat{C}, \hat{S}] = \frac{1}{2i} \hat{P}_0. \quad (4.8)$$

Сумма их квадратов не равна единичному оператору:

$$\hat{C}^2 + \hat{S}^2 = 1 - \frac{1}{2} \hat{P}_0. \quad (4.9)$$

Для каждого оператора  $\hat{C}$  и  $\hat{S}$  можно определить независимые некоммутирующие операторы фазы:

$$\hat{\varphi}_C \equiv \cos^{-1} \hat{C}, \quad \hat{\varphi}_S \equiv \sin^{-1} \hat{S}.$$

Таким образом, путь определения оператора фазы через операторы  $\hat{C}$  и  $\hat{S}$  приводит к двум некоммутирующим эрмитовым операторам фазы. В этом можно видеть либо причину бесплодности попыток ввести единственный оператор фазы [8], либо то, что фазы, определенные через операторы  $\hat{C}$  и  $\hat{S}$ , и фаза, определенная через вероятностно-операторную меру (3.7), являются различными физическими величинами.

Следствием соотношений (4.2), (4.8) и (4.9) являются соотношения неопределенности

$$\Delta n \Delta C \geq \frac{1}{2} |\langle S \rangle|, \quad (4.10)$$

$$\Delta n \Delta S \geq \frac{1}{2} |\langle C \rangle|, \quad (4.11)$$

$$\Delta S \Delta C \geq \frac{1}{2} |\langle \hat{P}_0 \rangle|. \quad (4.12)$$

Собственные векторы оператора  $\hat{C}$ :

$$\begin{aligned} |\cos \theta\rangle &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sum_0^\infty \sin[(n+1)\theta] |n\rangle = \\ &= -i[\exp(i\theta)|\theta\rangle - \exp(-i\theta)|-\theta\rangle], \end{aligned} \quad (4.13)$$

ортогональны и образуют разложение единицы. Спектр собственных значений  $\hat{C}$  лежит в интервале от  $-1$  до  $1$ . Независимые собственные функции  $\hat{C}$  содержатся в интервале  $[0, \pi]$  значений переменной  $\theta$ .

Собственные векторы оператора  $\hat{S}$ :

$$|\sin \theta\rangle = [\exp(i\theta)|\theta\rangle + \exp(-i\theta)|\pi - \theta\rangle], \quad (4.14)$$

обладают теми же свойствами. Независимые собственные функции  $\hat{S}$  содержатся в интервале  $[-\pi/2, \pi/2]$  значений переменной  $\theta$ . Векторы  $|\theta\rangle$  тождественны векторам (3.1).

Действие операторов  $\hat{C}$  и  $\hat{S}$  на произвольные векторы иллюстрируют соотношения

$$\langle f | \hat{S} | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \sin(\theta) f^*(\theta) g(\theta) d\theta,$$

$$\langle f | \hat{C} | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \cos(\theta) f^*(\theta) g(\theta) d\theta.$$

В то же время векторы  $|\cos \theta\rangle$  и  $|\sin \theta\rangle$  являются собственными векторами операторов  $\hat{\varphi}_C$  и  $\hat{\varphi}_S$  [26]:

$$\hat{\varphi}_C |\cos \theta\rangle = \theta |\cos \theta\rangle, \quad \hat{\varphi}_S |\sin \theta\rangle = \theta |\sin \theta\rangle.$$

Как следствие, операторы  $\hat{\varphi}_C$  и  $\hat{\varphi}_S$  можно представить в виде

$$\hat{\varphi}_C = \int_0^\pi \theta |\cos \theta\rangle \langle \cos \theta| d\theta,$$

$$\hat{\varphi}_S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \theta |\sin \theta\rangle \langle \sin \theta| d\theta.$$

Собственные состояния операторов  $\hat{C}$  и  $\hat{S}$  вырождены. Вектору  $|\cos \theta\rangle$  соответствуют два значения фазы  $\varphi_C$ :  $\theta$  и  $-\theta$ , вектору  $|\sin \theta\rangle$  — два значения фазы  $\varphi_S$ :  $\theta$  и  $\pi - \theta$ . Поэтому, если в момент  $t = 0$  осциллятор находился в состоянии  $|\cos \theta\rangle$ , вектор

$$\begin{aligned} |\cos \theta(t)\rangle &\equiv \exp(-i\hat{N}\omega t) |\cos \theta\rangle = \\ &= -i[\exp(i\theta)|\theta - \omega t\rangle - \exp(-i\theta)|-\theta - \omega t\rangle] \end{aligned} \quad (4.15)$$

будет собственным вектором оператора  $\hat{C}$  только в моменты времени  $t = 0$  и  $k\pi/\omega$ . Аналогично, дважды за период собственным вектором оператора  $\hat{S}$  становится вектор

$$|\sin \theta(t)\rangle = \exp(i\theta)|\theta - \omega t\rangle + \exp(-i\theta)|\pi - \theta - \omega t\rangle.$$

В случае начального состояния  $|\cos \theta\rangle$  распределение фазы  $\varphi_C$  изменяется во времени следующим образом. Начальное  $\delta$ -распределение распадается на два одинаковых пакета конечной ширины, движущихся с одинаковой скоростью во взаимно противоположных направлениях. После "отражения" от границ интервала  $[0, \pi]$  эти пакеты идут навстречу друг другу. Через половину периода они сходятся в точке, симметричной (относительно  $\pi/2$ ) начальной точке  $\theta$ , и распределение вновь становится  $\delta$ -образным.

В случае когерентного состояния  $|\alpha\rangle$ , где  $\alpha = |\alpha| \exp(i\varphi)$ , при больших значениях  $|\alpha|$  моменты  $\hat{C}$  и  $\hat{S}$  близки к классическим:

$$\langle C \rangle \sim \cos \varphi, \quad \langle C^2 \rangle \sim \cos^2 \varphi, \quad \langle C^2 + S^2 \rangle \sim 1.$$

Аналогичные соотношения имеют место для операторов  $\hat{S}$ . При малых значениях  $|\alpha|$ , т.е. существенном перекрытии когерентного состояния с вакуумным,

$$\langle C \rangle \sim |\alpha| \cos \varphi, \quad \langle S \rangle \sim |\alpha| \sin \varphi, \quad \langle S^2 \rangle \sim \frac{1}{4}, \quad \langle C^2 \rangle \sim \frac{1}{4}.$$

В случае  $n$ -состояния

$$\langle n | C | n \rangle = \langle n | S | n \rangle = 0,$$

как и все другие нечетные моменты операторов  $\hat{C}$  и  $\hat{S}$ . Это согласуется с представлением, что в  $n$ -состояниях фаза "полностью не определена", т.е. ее распределение равномерно. Однако четные моменты операторов  $\hat{C}$  и  $\hat{S}$  не всегда соответствуют такому представлению о распределении фазы:

$$\begin{aligned} \langle n|C^2|n\rangle &= \frac{1}{2}, \quad n \geq 1, \quad \text{но} \quad \langle n|C^2|n\rangle = \frac{1}{4}, \quad n = 0, \\ \langle n|C^4|n\rangle &= \frac{3}{8}, \quad n \geq 2, \quad \text{но} \quad \langle n|C^4|n\rangle = \frac{5}{16}, \quad n = 1, \\ \langle n|C^4|n\rangle &= \frac{1}{8}, \quad n = 0. \end{aligned}$$

Шестой момент совпадает с классическим только при  $n \geq 3$ . Естественно, что равномерному распределению фазы в  $n$ -состояниях не соответствует само распределение собственных значений оператора  $\hat{C}$ , которое, согласно (4.13), можно записать как функцию  $\theta$  в виде

$$P_n(\cos \theta) = |\langle n|\cos \theta\rangle|^2 = \frac{2}{\pi} \sin^2[(n+1)\theta]. \quad (4.16)$$

Соотношение (4.16) определяет также и распределение фазы  $\varphi_C$  в интервале  $[0, \pi]$ . Плотность вероятности, отнесенная к интервалу  $[0, 2\pi]$  оказывается в два раза меньше. Дисперсия фазы в  $n$ -состоянии зависит от значения  $n$ :

$$\Delta^2 \varphi_C = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2(n+1)^2}.$$

В этой связи логичным представляется утверждение, что в вакуумном и других энергетических состояниях, вопреки ожиданиям, нет равномерного распределения фазы [8].

Приведенное утверждение основано на том, что у квантового осциллятора фаза существует независимо от измерения и значения наблюдаемых  $\hat{C}$  и  $\hat{S}$  равны значениям соответствующих тригонометрических функций фазы. Возможна и другая точка зрения: наблюдаемые  $\hat{C}$  и  $\hat{S}$  не сводятся к тригонометрическим функциям фазы, а являются самостоятельными наблюдаемыми, так же как наблюдаемая  $\hat{x}^2 \hat{p}^2 + \hat{p}^2 \hat{x}^2$  не сводится к произведению квадратов координаты и импульса [38]. Фазы  $\varphi_C$  и  $\varphi_S$  не являются "истинными" фазами, а соответствуют обратному преобразованию  $\hat{C}$  и  $\hat{S}$ .

Соотношение (4.16) можно рассматривать и как распределение  $n$  (не нормированное) на состоянии  $|\cos \theta\rangle$ . Оно согласуется с тем, что такое состояние представляет собой суперпозицию (4.13) двух "фазовых" состояний:  $|\theta\rangle$  и  $|\theta\rangle$ . В каждом отдельном из состояний  $|\theta\rangle$  имеет место равномерное распределение  $n$ , но в суперпозиции справедливо (4.16). Согласно (4.16) распределение  $n$  стремится к равномерному при  $\theta \rightarrow m\pi$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), т.е. при  $|\theta\rangle \rightarrow |-\theta\rangle$ .

Выше уже обращалось внимание на то, что решение (4.4) уравнений (4.1)–(4.3) не единственное. Свойства других решений не анализировались.

Подведем итог. Распределение фазы, определенной как  $\varphi_C = \arg C$  или  $\arg S$ , не совпадает с распределением (3.5) фазы  $\theta$ . Соответственно, распределение значений  $C$  и  $S$  нельзя рассчитать как распределение тригонометрических функций фазы  $\theta$ .

Вместе с тем, если интерес представляет не само распределение тригонометрических функций фазы, а

только их моменты, значения  $\langle C^m \rangle$  и  $\langle S^m \rangle$  будут близки к значениям  $\langle \cos^m \theta \rangle$  и  $\langle \sin^m \theta \rangle$  при условии, что для четных  $m$  состояние осциллятора слабо перекрывается с уровнями  $m/2 - 1$ .

## 5. Фаза и фазовое пространство

### 5.1. Вигнеровское распределение фазы

Конечная цель всех подходов к описанию фазовых свойств поля — расчет распределения результатов фазовых измерений. Распределение фазы можно рассчитать, минуя этап определения оператора фазы [39]. В этом случае фаза рассматривается как параметр — координата в фазовой плоскости.

Известно, что квадрат модуля скалярного произведения векторов с точностью до множителя  $2\pi$  равен скалярному произведению в фазовом пространстве соответствующих функций Вигнера. В результате распределение фазы в состоянии  $|\psi\rangle$  можно представить в виде

$$P(\phi) = |\langle \psi|\phi\rangle|^2 = 2\pi \int W_\psi(x, p) W_\phi(x, p) dx dp. \quad (5.1)$$

Здесь  $W_\psi$  и  $W_\phi$  — функции Вигнера состояний  $|\psi\rangle$  и  $|\phi\rangle$  (где  $|\phi\rangle$  — фазовое состояние). В полярных координатах

$$x = r \cos \varphi, \quad p = r \sin \varphi$$

из соотношения (5.1) получаем

$$P(\phi) = 2\pi \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} W_\psi(r, \varphi) W_\phi(r, \varphi) d\varphi. \quad (5.2)$$

Следующий шаг — замена функции Вигнера фазового состояния на  $2\pi\delta(\varphi - \theta)$ -функцию. Если под фазовым состоянием  $|\phi\rangle$  понимать состояние  $|\theta\rangle$  в форме (3.1), то такую замену следует рассматривать как приближение. Истинная функция  $W_\theta$  имеет конечную ширину и знакопеременна [40]. Поэтому истинное распределение фазы  $\theta$  может отличаться от приближенного:

$$P_W(\theta) = \int_0^\infty W_\psi(r, \theta) r dr. \quad (5.3)$$

Таким образом, маргинальное распределение (5.3) совместной квазивероятности  $W_\psi(r, \theta)$  является приближенным распределением фазы  $\theta$ . Оно стремится к точному только при  $r \rightarrow \infty$  [40].

Следует иметь в виду, что, хотя во многих случаях соотношение (5.3) дает разумный результат, оно может дать отрицательную вероятность для некоторых значений фазы [41]. Возможность получения отрицательного значения  $P_W(\phi)$  доказывает, что нет такого фазового состояния  $|\phi\rangle$ , которому соответствовала бы функция Вигнера вида  $\delta(\varphi - \phi)$ .

Кроме функции Вигнера, квазивероятностями, зависящими от фазы комплексной амплитуды  $\alpha = r \exp(-i\phi)$ , являются  $P(\alpha)$ -функция (Глаубера) и  $Q(\alpha)$ -функция (Хусими). Функция Вигнера упрощает усреднение симметрично-упорядоченных по  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^\dagger$  корреляционных функций [42]. Для нормально-упорядоченных корреляционных функций удобна  $P$ -функция [43], а для анти-нормально-упорядоченных —  $Q$ -функция [44].

Соответствующими распределениями фазы, помимо (5.3), могут быть распределения  $P_P(\phi)$  и  $P_Q(\phi)$ , полученные из  $P(\alpha)$ - и  $Q(\alpha)$ -функций путем интегрирования по радиальной координате (амплитуде). Как и в случае с функцией Вигнера, при некоторых состояниях могут быть получены нефизические результаты. Так,  $P$ -функция не существует как нормальная математическая функция в таких важных случаях, как идеализированное сжатое состояние и  $n$ -состояние.

Фантазия теоретиков не знает границ. Одни из них предложили усовершенствовать метод определения фазы как параметра фазовой плоскости путем удвоения числа переменных в фазовом пространстве, так что интенсивность и фаза становятся комплексными  $c$ -числами [45].

## 5.2. Иллюстрация расхождений в подходах

Представленные выше подходы к определению фазы квантового осциллятора (через операторы фазы, операторы  $\hat{C}$  и  $\hat{S}$ , квазивероятности  $W(\alpha)$ ,  $P(\alpha)$ ,  $Q(\alpha)$ ) дают несовпадающие результаты. В качестве иллюстрации рассмотрим смешанное состояние моды [15]

$$\rho = p|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + (1-p)|\psi_2\rangle\langle\psi_2|,$$

где

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|0\rangle + |1\rangle\}, \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|1\rangle - |2\rangle\}.$$

Сравним, при каких значениях параметра  $p$  полученные различными путями функции распределения фазы дают ее равномерное распределение.

Распределение Пегга – Барнетта (3.5)

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi} \{1 + (2p - 1) \cos \theta\}$$

будет равномерным при  $p = 1/2$ . Для этого же состояния распределение

$$P_Q(\phi) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[ p - (1-p) \frac{3}{2\sqrt{2}} \right] \cos \phi \right\}$$

будет равномерным при  $p = 1/(1 + 2\sqrt{2}/3) \neq 1/2$ .

Соответствующее вигнеровское распределение фазы

$$P_W(\phi) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \right\}$$

оказывается отрицательным при  $\cos \phi < -\sqrt{2/\pi}$ .

Распределение фазы, рассчитанное через оператор  $\hat{C}$ , не совпадает ни с одним из полученных выше.

Графические иллюстрации расхождения функций распределения фазы при разных подходах в случае суперпозиции и смеси когерентных состояний приведены в [46, 31]. Для когерентных состояний распределение фазы по Пеггу – Барнетту и Вигнеру различаются в максимуме  $P(\theta)$  примерно на 10 % при  $|\alpha| = 1$  и на 5 % при  $|\alpha| = 2$ .

## 6. Операциональный подход.

### Методы измерения фазы

Известны необходимые условия точного измерения квантовых наблюдаемых: в прибор должна поступать

информация только об интересующей нас наблюдаемой. Недопустимо одновременное поступление информации о некоммутирующих с ней наблюдаемых. Достаточным условием такого измерения является взаимодействие системы с прибором, при котором гамильтониан взаимодействия пропорционален данной наблюдаемой. Подобную схему измерений называют стандартной схемой квантовых измерений.

Способ реализации стандартной схемы измерения фазы еще не придуман и вряд ли будет придуман, поскольку для этого необходимо физическое взаимодействие, при котором энергия взаимодействия зависела бы от фазы, но не зависела бы от амплитуды колебаний. Прямых способов измерения фазы нет даже в области классических (квазиклассических) состояний. Как в фазовых, так и почти во всех других измерениях используются координатные взаимодействия, т.е. взаимодействия, энергия которых есть функция обобщенных координат: пространственных координат, заряда, напряженности электрического поля.

В классической области для получения любой информации об осцилляторе достаточно иметь реализации  $x(t)$  изменения координаты во времени. В основе большинства методов измерения фазы лежит преобразование сигнала с квантового на классический уровень.

**Измерение фазы методом усиления.** С помощью нечувствительного к фазе квантового (лазерного, мазерного) или параметрического усилителя начальное микроскопическое поле доводится до макроскопического уровня и посредством известной классической интерференционной техники измеряется фаза усиленного поля. Фактически одновременно можно измерить амплитуду  $r$  поля и определить совместное распределение в фазовой плоскости  $w(r, \varphi)$ . В процессе усиления ко входному сигналу добавляются шумы усилителя.

Оценки фазы и амплитуды входного поля через фазу и амплитуду усиленного поля могут быть только приближенными. Погрешности оценок соответствуют погрешностям совместного измерения некоммутирующих наблюдаемых. Полученное путем усреднения  $w(r, \varphi)$  распределение фазы

$$P(\varphi) = \int_0^\infty w(r, \varphi) r dr$$

будет шире, чем истинное распределение фазы.

В случае большого усиления функция  $w(r, \varphi)$  связана с  $Q(\alpha)$ -функцией исходного поля соотношением [47–49]

$$w(r, \varphi) = G^{-1} Q(G^{-1/2} \alpha), \quad (6.1)$$

где  $G$  — коэффициент усиления интенсивности. Поскольку функция  $Q(\alpha) \geq 0$ , ее можно интерпретировать как истинную вероятность (в отличие от функции Вигнера).

Как показано в [50], измерение фазы методом усиления соответствует измерению эрмитова оператора

$$\hat{A} = \frac{1}{\pi} \int \varphi |\alpha\rangle\langle\alpha| r dr d\varphi.$$

В соответствии с (6.1)  $Q(\alpha)$ -функция получается простым изменением масштаба измеренного распределения  $w(r, \varphi)$ . Таким образом, метод измерения фазы через усиление заключается в измерении  $Q$ -функции сигнального поля. Пример подобного экспериментального исследования описан в [51].

**Гетеродинирование.** Сигнал на частоте  $\nu_0 + \Delta\nu$  смешивается с помощью делителя луча с сильным когерентным полем гетеродина с частотой  $\nu_0$  и посылается на фотодетектор. Затем с помощью квадратурного демодулятора измеряются амплитуды  $y_1$  и  $y_2$  квадратурных компонент  $y_1 \sin \Delta\nu t$  и  $y_2 \cos \Delta\nu t$  осциллирующий фототока [52].

Процедура измерения, так же как и при усилении, сопровождается добавлением к сигналу шумов. В осцилляции тока на частоте  $\Delta\nu$  дает вклад вакуумное поле на зеркальной частоте  $\nu_0 - \Delta\nu$ . Доказано [52], что распределение  $w(y_1, y_2)$  есть не что иное, как  $Q(\alpha)$ -функция для сигнального поля с  $\alpha = y_1 + iy_2$ . Следовательно, гетеродинная схема измерения физически эквивалентна схеме с усилением.

**Гомодинирование.** В обычной гомодинной схеме имеются два входа и два выхода (порты), на один из которых подается сигнальное поле с частотой  $\nu$ , а на другой — сильное когерентное поле той же частоты. Образующиеся после делителя два луча, в которых смешаны сигнальное и опорное поля, поступают на два фотодетектора. По отсчетам детекторов оценивается значение одной из квадратурных амплитуд сигнального поля.

В [53] предложена восьмипортовая (четыре входа и четыре выхода) схема гомодинного детектора, позволяющая производить совместное измерение обеих квадратурных амплитуд. Сигнал с помощью делителя 50 : 50 делится на два луча, каждый из которых поступает на один из гомодинных детекторов. Опорные лучи получают путем деления сильного когерентного поля и сдвигаются по фазе на  $\pi/2$  друг относительно друга. Одновременно оцениваются две квадратурные амплитуды сигнального поля.

Подобное совместное измерение некоммутирующих наблюдаемых, как и описанные выше схемы измерения, оказываются приближенными. Флуктуации в виде вакуумных полей проникают через два свободных входа на делителях сигнального и опорного лучей. В [54] показано, что и в такой гомодинной схеме измеряемое совместное распределение квадратур является  $Q$ -функцией сигнального поля. (Квантовый анализ восьмипортовой схемы проведен в разделе 5.2.)

**Оптическая гомодинная томография.** Функции распределения фазы (как и других наблюдаемых) можно рассчитать, если экспериментально определена функция Вигнера. Такую задачу можно решить с помощью оптической гомодинной томографии [55]. В основе оптической гомодинной томографии лежит схема гомодинного детектирования, служащая для измерения квадратурных компонент поля.

По определению функция Вигнера

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x + x' | \hat{\rho} | x - x' \rangle \exp(-2ipx') dx',$$

где  $\hat{\rho}$  — оператор плотности,  $x$  — координата,  $p$  — импульс. В случае оптической моды

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{p} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i.$$

Квадратурные амплитуды  $\hat{x}_\theta$  и  $\hat{p}_\theta$ , определенные относительно опорной фазы  $\theta$ , равны

$$\hat{x}_\theta = \hat{x} \cos \theta + \hat{p} \sin \theta, \quad \hat{p}_\theta = \hat{p} \cos \theta - \hat{x} \sin \theta.$$

Распределение  $P_\theta(x_\theta)$  квадратурной амплитуды  $x_\theta$  можно представить интегралом по  $p_\theta$  от функции Вигнера [56]:

$$P_\theta(x_\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x_\theta \cos \theta - p_\theta \sin \theta, x_\theta \sin \theta + p_\theta \cos \theta) dp_\theta.$$

В основе идеи оптической гомодинной томографии лежит возможность однозначного преобразования в функцию Вигнера множества функций  $P_\theta(x_\theta)$ , соответствующих последовательным значениям  $\theta$  от 0 до  $\pi$  [56]. В случае конечного ряда значений  $\theta$  это можно произвести известным в теории томографических изображений методом трансформации Радона [57]. Имея функцию Вигнера  $W(x, p)$ , путем фурье-преобразования можно получить матрицу плотности исследуемой моды:

$$\langle x + x' | \hat{\rho} | x - x' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, p) \exp(2ipx') dp.$$

Определив матрицу плотности, можно рассчитать как распределение фазы, так и других наблюдаемых.

В [55] приведены результаты экспериментального исследования моды в состоянии вакуума и в состоянии сжатого вакуума (полученного путем сжатия вакуумного состояния по одной из квадратурных компонент). Распределения фазы, рассчитанные через экспериментально определенную функцию Вигнера по методу Пегга–Барнетта, и вигнеровское распределение качественно согласуются с соответствующими теоретическими.

Характерной особенностью описанных выше методов измерения является то, что они дают информацию о распределении фазы во входном ансамбле, но не редуцируют его в состояния с меньшей неопределенностью фазы.

**Измерение фазы с помощью нуль-детектора координаты.** В основе метода лежит идея определения фазы колебаний путем измерения момента перехода координаты через нулевое значение [59, 60]. Такое измерение предполагает координатное взаимодействие осциллятора с прибором в очень узкой области вблизи нуля. В этом случае моменту взаимодействия осциллятора с прибором соответствует фаза колебаний 0 или  $\pi$ . Эту неоднозначность можно исключить, если нуль-детектор будет определять и направление движения.

Взаимодействие осциллятора с нуль-детектором подобно взаимодействию частицы с потенциальным барьером. Чем точнее измерение момента перехода через нуль, тем выше должен быть потенциальный барьер. В результате, с увеличением точности измерения растет вероятность отражения и прекращается пересечение нуля координаты [60].

Одновременно описываемый метод измерения фазы является методом приготовления состояния с относительно хорошо определенной фазой. Измерение момента пересечения нуля координаты приводит к сжатию состояния осциллятора по одной из квадратурных компонент и возмущению другой. Апостериорная неопределенность фазы при сжатии уменьшается до тех пор, пока сжатое состояние не перекроется с вакуумным. При  $\langle n \rangle \gg 1$  минимальная неопределенность фазы сжатого состояния [61]

$$\Delta\theta_{\text{sqv}} = \frac{1}{2\langle n \rangle} \sqrt{\ln \langle n \rangle}.$$

Возможные способы реализации нуль-детекторов для механического и электромагнитного осцилляторов описаны в [59].

## 7. Квантовая разность фаз

Исследование фазы имеет больше теоретический, чем практический интерес. В реальных фазочувствительных экспериментах результат зависит от разности фаз двух (или большего числа) мод поля. В большинстве случаев одна из мод берется в квазиклассическом состоянии с хорошо определенной фазой и играет роль опорной волны. Измерение разности фаз между сигнальной и опорной волнами в этом случае фактически является измерением фазы сигнальной волны. Но в ряде других экспериментов обе моды могут находиться в существенно неклассических и перепутанных состояниях. Так же как и в случае одномодового поля, существует несколько подходов к описанию фазозависимых свойств двухмодового поля.

### 7.1. Разность фаз как разность фаз отдельных мод

Разность фаз  $\theta_-$  в двухмодовом поле можно представить как разность фаз отдельных мод  $\theta_- = \theta_2 - \theta_1$ . Считая фазовым состоянием одномодового поля вектор (3.1), по аналогии с соотношением (3.6) находим совместное распределение фаз  $\theta_1$  и  $\theta_2$  [9, 62]:

$$P(\theta_1, \theta_2) = \langle \theta_2 | \langle \theta_1 | \hat{\rho} | \theta_1 \rangle | \theta_2 \rangle, \quad (7.1)$$

где  $\hat{\rho}$  — оператор плотности двухмодового поля. Совместное распределение фаз можно преобразовать к распределению разности фаз

$$P(\theta_-) = \int_{2\pi} P(\theta_1, \theta_1 + \theta_-) d\theta_1. \quad (7.2)$$

В случае произвольного чистого состояния двухмодового поля

$$|ff\rangle = \sum_{n_1, n_2} C_{n_1 n_2} |n_1\rangle |n_2\rangle,$$

где  $|n_1\rangle$  и  $|n_2\rangle$  — энергетические состояния первой и второй мод, из (7.1) получаем

$$P(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{4\pi^2} \left| \sum_{n_1, n_2} C_{n_1 n_2} \exp[-i(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)] \right|^2. \quad (7.3)$$

Соответствующее распределение разности фаз имеет вид

$$P(\theta_-) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n_1, n_2} \sum_{n'_1} C_{n_1 n_2}^* C_{n'_1 (n_1 - n'_1 + n_2)} \exp[i(n'_1 - n_1)\theta_-]. \quad (7.4)$$

Это распределение разности фаз называют распределением Пегга–Барнетта. Если хотя бы одна из мод, например мода 2, находится в энергетическом состоянии  $|n_j\rangle$ , то (7.4) дает вполне ожидаемый результат:  $P(\theta_-) = 1/2\pi$ , что согласуется с представлением о полной неопределенности фазы моды в таком состоянии.

Очевидно, что распределение разности фаз  $P(\theta_-)$  инвариантно относительно одновременного одинакового сдвига обеих фаз. Другими словами, распределения разности фаз одинаковы в состояниях  $\hat{\rho}$  и  $\exp(i\phi_0(\hat{N}_1 + \hat{N}_2)) \hat{\rho} \exp(-i\phi_0(\hat{N}_1 + \hat{N}_2))$ . Это означает, что разность фаз и общее число фотонов в двухмодовом

поле являются совместимыми наблюдаемыми. Следовательно, возможны состояния с одновременно хорошо определенными разностью фаз и суммарным числом фотонов. Дополнительной к разности фаз наблюдаемой является разность чисел фотонов в модах  $\hat{N}_2 - \hat{N}_1$ . Поэтому процесс, приводящий к уменьшению неопределенности разности фаз, вызывает возмущение разности чисел фотонов, но не влияет на их сумму.

Совместимость разности фаз и общего числа фотонов позволяет представить соотношение (7.2) в следующем виде (индекс "—" в дальнейшем опускаем) [62]:

$$P(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \theta^{(n)} | \hat{\rho} | \theta^{(n)} \rangle, \quad (7.5)$$

где вектор

$$|\theta^{(n)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n_1=0}^n \exp(in_1\theta) |n_1\rangle |n - n_1\rangle \quad (7.6)$$

лежит в подпространстве с общим числом фотонов  $n$ .

Функция

$$P(n, \theta) = \langle \theta^{(n)} | \hat{\rho} | \theta^{(n)} \rangle \quad (7.7)$$

представляет собой совместное распределение разности фаз и общего числа фотонов. Совместимость разности фаз и общего числа фотонов можно выразить соотношениями

$$P(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n, \theta), \quad P(n) = \int P(n, \theta) d\theta, \quad (7.8)$$

где  $P(n)$  — вероятность иметь  $n$  фотонов в двухмодовом поле. Таким образом, без потери информации можно изучать фазоразностные свойства любого состояния поля отдельно в каждом конечномерном подпространстве  $H_n$ .

Каждая функция  $P(n, \theta)$  в некоторой степени избыточна. Доказано, что функция  $P(n, \theta)$  не может быть произвольной [62]. В соответствии с (7.7) и (7.6) наиболее общей формой этой функции является

$$P(n, \theta) = \sum_{k=-n}^n c_k \exp(ik\theta), \quad c_k = c_{-k}^*. \quad (7.9)$$

Функция  $P(n, \theta)$  зависит от  $2n + 1$  параметров: ее можно полностью задать значениями в  $2n + 1$  надлежащим образом выбранных точках. Это могут быть, например, точки

$$\theta_r^{(n)} = \frac{2\pi r}{2n + 1} \quad (7.10)$$

с целыми значениями  $r$  от  $-n$  до  $n$ .

Инвертируя (7.9), коэффициенты  $c_k$  можно выразить через значения функции  $P(n, \theta)$  в точках  $\theta = \theta_r^{(n)}$ :

$$c_k = \frac{1}{2n + 1} \sum_{r=-n}^n P(n, \theta_r^{(n)}) \exp\left(-\frac{i2\pi kr}{2n + 1}\right).$$

Значения функции  $P(n, \theta)$  в точках  $\theta = \theta_r^{(n)}$  задаются соотношением

$$P(n, \theta_r^{(n)}) = \langle \theta_r^{(n)} | \hat{\rho} | \theta_r^{(n)} \rangle,$$

где  $|\theta_r^{(n)}\rangle$  — подмножество векторов  $|\theta^{(n)}\rangle$ . В результате, функция  $P(n, \theta)$  приобретает вид

$$P(n, \theta) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k,r=-n}^n P(n, \theta_r^{(n)}) \exp[-ik(\theta - \theta_r^{(n)})]. \quad (7.11)$$

Теперь среднее значение функции  $f(\theta)$  можно представить соотношением

$$\langle f(\theta) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{r=-n}^n P(n, \theta_r^{(n)}) f^{(n)}(\theta_r^{(n)}). \quad (7.12)$$

Здесь  $f^{(n)}(\theta_r^{(n)})$  — функция, полученная из  $f(\theta)$  путем удаления из нее всех фурье-частот выше  $n$ .

### 7.2. Оператор разности фаз

Так же как в случае одномодового поля (одного осциллятора), экспоненциальный оператор разности фаз, определенный по аналогии с классическим соотношением  $\exp[i(\phi_1 - \phi_2)] = \exp(i\phi_1) \exp(-i\phi_2)$  в виде произведения  $\hat{E}_1 \hat{E}_2^\dagger$  операторов Сусскинда–Глоговера для отдельных мод, не будет унитарным. Подход, позволяющий определить соответствующий разности фаз унитарный оператор, предложен в [63]. В основе его лежит полярное разложение комплексных амплитуд двух мод в виде

$$\hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger = \hat{E}_{12} \sqrt{\hat{N}_1(\hat{N}_2 + 1)}, \quad (7.13)$$

где  $\hat{a}_1$  и  $\hat{a}_2$  — операторы уничтожения соответствующих мод.

Как и в одномерном случае, полярное разложение не полностью определяет экспоненту фазы. В данном случае оказывается неопределенным матричный элемент  $\langle n_1, 0 | \hat{E}_{12} | 0, n_2 \rangle$ , поэтому оператор  $\hat{E}_{12}$  не может быть однозначно определен только из требования его унитарности. Дополнительными условиями являются соотношения

$$[\hat{E}_{12}, \hat{N}_1 + \hat{N}_2] = 0, \quad (7.14)$$

$$\left[ \hat{E}_{12}, \frac{1}{2}(\hat{N}_1 - \hat{N}_2) \right] = \hat{E}_{12}, \quad (7.15)$$

полученные исходя из принципа соответствия квантовых коммутаторов классическим скобкам Пуассона. Следует заметить, что соотношения (7.14) и (7.15) допускают также неунитарное решение для  $\hat{E}_{12}$ , например оператор  $\hat{E}_1 \hat{E}_2^\dagger$ .

Для определения унитарного решения уравнения (7.13) его преобразовывают к виду

$$\hat{S}_- = \hat{E}_{12} \sqrt{\hat{S}_+ \hat{S}_-}, \quad \hat{S}_\pm = \frac{1}{2}(\hat{S}_1 \pm i\hat{S}_2). \quad (7.16)$$

Здесь  $\hat{S}_j$  — эрмитовы операторы Стокса, соответствующие измеряемым классическим параметрам Стокса [64]:

$$\hat{S}_0 = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2, \quad \hat{S}_1 = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1, \quad (7.17)$$

$$\hat{S}_2 = i\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2, \quad \hat{S}_3 = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2.$$

Операторы (7.17) удовлетворяют коммутационным соотношениям для алгебры Ли трехмерной группы вращения SU(2):

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = 2i\epsilon_{ijk} \hat{S}_k, \quad [\hat{S}_i, \hat{S}_0] = 0. \quad (7.18)$$

С точностью до множителя 2 операторы  $\hat{S}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) совпадают с операторами углового момента, в то время как  $\hat{S}_0$  представляет собой оператор общего числа фотонов.

Дальнейшие шаги по определению унитарного оператора  $\hat{E}_{12}$  оправдываются его коммутативностью с оператором суммы фотонов (7.14). Это свойство позволяет исследовать ограничения оператора  $\hat{E}_{12}$  сначала отдельно в каждом из подпространств  $H_n$  с числом фотонов  $n$ . Решение уравнения (7.16) получается в виде унитарного экспоненциального оператора фазы [65, 66]:

$$\hat{E}_{12}^{(n)} = \sum_{m=1}^n |m-1, n-m+1\rangle \langle m, n-m| + \exp[i(n+1)\phi^{(n)}] |n, 0\rangle \langle 0, n|, \quad (7.19)$$

где  $\phi^{(n)}$  — произвольная фаза.

Унитарность оператора обеспечивает добавочное слагаемое, базирующееся на конечности числа состояний. Следовательно, в каждом подпространстве  $H_n$  имеется  $n+1$  ортонормированных состояний, таких что

$$\hat{E}_{12}^{(n)} |\phi_r^{(n)}\rangle = \exp(i\phi_r^{(n)}) |\phi_r^{(n)}\rangle, \quad r = 0, 1, \dots, n. \quad (7.20)$$

В  $n$ -базисе состояние (7.20) имеет вид

$$|\phi_r^{(n)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{n_1=0}^n \exp(in_1\phi_r^{(n)}) |n_1, n-n_1\rangle, \quad (7.21)$$

при этом для одного и того же  $2\pi$ -окна во всех подпространствах

$$\phi_r^{(n)} = \phi_0 + \frac{2\pi r}{n+1}. \quad (7.22)$$

Оператором  $\hat{E}_{12}$  на полном пространстве будет

$$\hat{E}_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{E}_{12}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n |\phi_r^{(n)}\rangle \exp(i\phi_r^{(n)}) \langle \phi_r^{(n)}|. \quad (7.23)$$

Поскольку оператор  $\hat{E}_{12}$  является унитарным, он определяет эрмитов оператор разности фаз:

$$\hat{\Phi}_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n |\phi_r^{(n)}\rangle \phi_r^{(n)} \langle \phi_r^{(n)}|. \quad (7.24)$$

Обратим внимание на то, что по форме соотношение (7.19) подобно представлению (3.15) унитарного оператора одномодового поля  $\exp(i\hat{\phi}_s)$  в  $H_s$ -пространстве Пегга–Барнетта, в котором дополнительный член  $\exp[i(s+1)\theta_0] |s\rangle \langle 0|$  приводит к закольцованности пространства.

Аналогичная картина имеет место и в данном случае. Под действием оператора (7.19) состояние  $|m, n-m\rangle$  переходит в состояние  $|m-1, n-m+1\rangle$ , если  $m \geq 1$ , состояние  $|0, n\rangle$  — в состояние  $|n, 0\rangle$ . Следовательно, допускается переброс возбуждения мод с одного края диапазона на другой. Оператор  $\hat{\Phi}_{12}$  имеет дискретные собственные значения. В каждом подпространстве  $H_n$  имеется  $n+1$  равномерно распределенных в интервале  $2\pi$  значений. (Такие же дискретные значения имеет оператор фазы Пегга–Барнетта  $\hat{\Phi}_s$  (3.16) при  $s = n$ .) Дискретность тем существеннее, чем меньше значение  $n$ , однако в случае  $n = 0$  требование унитарности приводит к равномерному распределению фазы.

Собственное состояние (7.21) оператора  $\hat{E}_{12}^{(n)}$  представляет собой состояние с равномерно распределенным между модами числом фотонов. Это вполне ожидаемый результат. В одномодовом поле фазе сопряжено число фотонов, а фазовым состоянием является состояние с равномерно распределенным числом фотонов. В двухмодовом поле сопряженной разности фаз наблюдаемой является разность числа фотонов в модах, и логично ожидать, что в состоянии с заданной разностью фаз распределение разности чисел фотонов в модах будет равномерным. Неожиданной является дискретность значений разности фаз.

Дискретные значения разности фаз  $\theta_r^{(n)}$  встречаются и в подходе Пегга и Барнетта (см. (7.10)), но там они не ассоциируются с дискретными собственными значениями наблюдаемой, а представляют собой просто набор точек, в которых задаются значения непрерывной функции  $P(n, \theta)$  с конечной шириной спектра. В случае оператора разности фаз величины  $\phi_r^{(n)}$  являются собственными значениями эрмитова оператора. Следовательно, если бы было возможно измерение, соответствующее проекторнозначной вероятностно-операторной мере  $|\phi_r^{(n)}\rangle\langle\phi_r^{(n)}|$ , их результатом были бы дискретные значения (7.22).

Физичность дискретности фаз вызывает определенные сомнения. Во-первых, кроме дискретного, формула (7.22) для  $\phi_r^{(n)}$  содержит произвольное непрерывное слагаемое  $\phi_0$ . Во-вторых, изменение разности фаз на произвольную величину  $\theta$  (например, под действием оператора  $\exp(i\theta\hat{n}_1)$ ) приводит к новой системе ортонормированных векторов  $\exp(i\theta\hat{n}_1)|\phi_r^{(n)}\rangle$ , которые могут быть получены из исходных с помощью замены значения  $\phi_0$  на  $\phi_0 + \theta$ . Следовательно, изменение разности фаз может быть непрерывным. В-третьих, с формальной точки зрения эрмитов оператор разности фаз с дискретными собственными значениями можно было бы получить и при подходе Пегга и Барнетта, выбрав из множества в общем случае неортогональных векторов (7.6) подмножество ортогональных векторов с соответствующими дискретными значениями  $\theta$ . Однако это не повлияло бы на восприятие разности фаз как разности непрерывных значений фаз отдельных мод.

В качестве экспериментального доказательства дискретности разности фаз ссылаются на дискретность отсчетов в известных интерферометрических схемах, в которых последним звеном являются счетчики фотонов. Такое доказательство неубедительно, поскольку дискретность отсчетов связана с дискретностью счета фотонов. Кроме того, в интерферометрических схемах измеряется, скорее, косинус или синус разности фаз, чем сама разность фаз. Хотя собственные значения операторов косинуса и синуса разности фаз в  $H_n$ -пространстве также дискретные, но они не совпадают со значениями  $\phi_r^{(n)}$  (см. раздел 7.3).

Из (7.24) следует, что среднее значение функции  $f(\hat{\Phi}_{12})$  на состоянии  $|\psi\rangle$  равно

$$\langle\psi|f(\hat{\Phi}_{12})|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n P(n, \phi_r^{(n)}) f(\phi_r^{(n)}), \quad (7.25)$$

$$P(n, \phi_r^{(n)}) \equiv |\langle\psi|\phi_r^{(n)}\rangle|^2.$$

Соотношение (7.25) отличается от соответствующего соотношения (7.12) в подходе Пегга и Барнетта только пределами суммирования и нормирующим множителем.

При предельном переходе в операторе  $\hat{E}_{12}^{(n)}$ , когда хотя бы одна из мод, например мода 2, находится в сильновозбужденном состоянии, наблюдается та же картина нарушения операторной алгебры, что и в случае с оператором фазы Пегга–Барнетта [63]. Пределом оператора  $\hat{E}_{12}$  при  $n \rightarrow \infty$  является неунитарный экспоненциальный оператор разности фаз Сусскинда–Глоговера  $\hat{E}_1\hat{E}_2^\dagger$ .

Среднее значение периодической функции разности фаз  $f(\hat{\Phi}_{12})$  в том же пределе на состоянии  $|\psi\rangle = |\psi_1, \psi_2\rangle$  определяется соотношением

$$\langle\psi|f(\hat{\Phi}_{12})|\psi\rangle \simeq \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} d\theta \int_{\phi_0}^{\phi_0+2\pi} P_1(\phi + \theta) P_2(\theta) f(\phi) d\phi, \quad (7.26)$$

где  $P(\theta) = |\langle\theta|\psi\rangle|^2$  — функция плотности распределения фазы одномодового поля.

**Пример 1. Когерентные состояния мод.** В случае если обе моды находятся в сильновозбужденных когерентных состояниях  $\alpha_i = |\alpha_i| \exp(i\phi_i)$ , из (7.26) получается тот же результат, что и при полуклассическом анализе:

$$\langle\Phi_{12}\rangle = \phi_1 - \phi_2, \quad \langle(\Delta\Phi_{12})^2\rangle = \frac{1}{4|\alpha_1|^2} + \frac{1}{4|\alpha_2|^2}. \quad (7.27)$$

**Пример 2. Состояние двухмодового сжатого вакуума.** Это неклассическое состояние света с сильными квантовыми корреляциями между модами [67] можно представить как результат действия на вектор двухмодового вакуумного поля оператора двухмодового сжатия:

$$|\zeta\rangle = \exp(\zeta\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger - \zeta^*\hat{a}_1\hat{a}_2)|0, 0\rangle. \quad (7.28)$$

В  $n$ -базисе этому состоянию соответствует выражение

$$|\zeta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh^n s}{\cosh s} \exp(in\xi) |n, n\rangle, \quad (7.29)$$

где параметр сжатия  $\zeta = s \exp(i\xi)$ . Общее число фотонов четное. Проекция на  $H_{2n}$ -пространство есть точное состояние с заданной разностью чисел фотонов. Поэтому можно было бы ожидать равномерного распределения разности фаз.

Из (7.29) следует

$$\langle\Phi_{12}\rangle = \phi_0 + \pi \left\langle \frac{\hat{N}}{\hat{N}+1} \right\rangle, \quad \langle(\Delta\Phi_{12})^2\rangle = \frac{4\pi^2}{3} \left\langle \frac{\hat{N}(\hat{N}+1/2)}{(\hat{N}+1)^2} \right\rangle - \pi^2 \left\langle \frac{\hat{N}}{\hat{N}+1} \right\rangle^2, \quad (7.30)$$

где  $\hat{N}$  — оператор суммарного числа квантов. В пределе больших значений  $s$ , как и ожидалось,  $\langle(\Delta\Phi_{12})^2\rangle \rightarrow \pi^2/3$ . Однако при  $s \rightarrow 0$ , когда состояние стремится к  $|0, 0\rangle$  (вакуумному),  $\langle(\Delta\Phi_{12})^2\rangle \rightarrow 0$ , что не согласуется с предположением о непрерывных значениях разности фаз.

### 7.3. Операторы косинуса и синуса разности фаз

Классическим  $\cos(\theta_2 - \theta_1)$  и  $\sin(\theta_2 - \theta_1)$  сопоставляются эрмитовы операторы [8]

$$\hat{C}_{12} = \frac{1}{2}(\hat{E}_1 - \hat{E}_{2+} + \hat{E}_{1+} - \hat{E}_{2-}), \quad (7.31)$$

$$\hat{S}_{12} = \frac{1}{2i}(\hat{E}_1 - \hat{E}_{2+} - \hat{E}_{1+} - \hat{E}_{2-}), \quad (7.32)$$

которые коммутируют с оператором полного числа фотонов. Как следствие, существуют собственные функции операторов, обладающие фиксированным главным числом  $n$ . Поскольку число таких состояний конечно, волновая функция нормируема. Следовательно, спектры операторов  $\hat{C}_{12}$  и  $\hat{S}_{12}$  дискретные в противоположность спектрам операторов  $\hat{C}$  и  $\hat{S}$ .

Коммутатор

$$[\hat{S}_{12}, \hat{C}_{12}] = \frac{1}{2i} (\hat{P}_0^{(1)} - \hat{P}_0^{(2)}), \quad \hat{P}_0^{(j)} = |n_j = 0\rangle \langle n_j = 0|,$$

диагонален на состояниях с заданным полным числом возбуждений:

$$[[\hat{S}_{12}, \hat{C}_{12}], \hat{N}] = 0. \quad (7.33)$$

Собственные функции оператора  $\hat{C}_{12}$ , которые одновременно являются собственными функциями оператора  $\hat{N}$ , равны

$$|n, \cos \theta_{nr}\rangle = \left(\frac{2}{n+2}\right)^{1/2} \sum_{n_1=0}^n \sin((n+1)\theta_{nr}) |n_1, n-n_1\rangle, \quad (7.34)$$

где

$$\theta_{nr} = \pm \frac{\pi r}{n+2}, \quad r = 1, 2, \dots, n+1. \quad (7.35)$$

Скалярное произведение собственных функций

$$\langle \cos \theta_{nr}, n | n, \cos \theta_{ms} \rangle = \delta_{nm} \delta_{rs}. \quad (7.36)$$

Состояние  $|0, 0\rangle$  соответствует собственной функции оператора  $\hat{C}_{12}$  с нулевым собственным значением.

Собственные функции операторов  $\hat{S}_{12}$  и  $\hat{N}$  равны

$$|n, \sin \varphi_{nr}\rangle = \left(\frac{2}{n+2}\right)^{1/2} \sum_{n_1=0}^n (-i)^{n_1} \sin[(n+1)\varphi_{nr}] \times \\ \times |n_1, n-n_1\rangle. \quad (7.37)$$

Соответствующие собственные углы

$$\varphi_{nr} = \theta_{nr} - \frac{\pi}{2}$$

лежат в интервале

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

При изменении разности фаз на произвольную величину  $\theta$  вектор  $\exp(i\theta \hat{n}_1) |n, \cos \theta_{nr}\rangle$  перестает быть собственным вектором оператора  $\hat{C}_{12}$ . Аналогичная картина имеет место с собственными векторами оператора  $\hat{S}_{12}$ .

Значения разности фаз  $\theta_{nr}$  и  $\varphi_{nr}$  дискретны, и в этом их сходство. Однако если дискретность разности фаз  $\varphi_r^{(n)}$  равна  $2\pi/(n+1)$ , то дискретность разности фаз  $\theta_{nr}$  и  $\varphi_{nr}$  равна  $\pi/(n+2)$ .

**Резюме.** После сравнения различных подходов к описанию разности фаз двухмодового поля можно ответить на вопрос, какова же разность фаз "на самом деле"? По мнению автора такая постановка вопроса в квантовой теории некорректна. Нет единственно определенной наблюдаемой, соответствующей классической разности фаз. В квантовой теории все определяется тем,

что "на самом деле" измеряется, т.е. какая вероятностно-операторная мера реализуется в конкретном измерении. Если реализуется вероятностно-операторная мера, соответствующая подходу Пегга и Барнетта, результаты измерения будут непрерывными. При реализации вероятностно-операторной меры, соответствующей операторам  $\hat{F}_{12}$  или  $\hat{C}_{12}$  и  $\hat{S}_{12}$ , отсчеты будут дискретными.

#### 7.4 Разность фаз и Q-функция

Выше обращалось внимание на то, что практически все реалистичные методы измерения фазы одномодового поля сводятся к определению Q-функции сигнального поля. Распределение фазы получалось как маргинальное распределение после интегрирования по радиальной переменной. Аналогичным образом можно определить совместное распределение фаз двухмодового поля как маргинальное распределение Q-функции двухмодового поля после интегрирования по радиальным переменным каждой из мод.

По определению Q-функция двухмодового поля равна

$$Q(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha_1, \alpha_2 | \rho | \alpha_1, \alpha_2 \rangle, \quad (7.38)$$

где  $\alpha_{1,2} = r_{1,2} \exp(i\theta_{1,2})$ ,  $|\alpha_1, \alpha_2\rangle = |\alpha_1\rangle |\alpha_2\rangle$ .

Соответствующее совместное распределение фаз

$$P(\theta_1, \theta_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty Q(r_1 \exp(i\theta_1), r_2 \exp(i\theta_2)) r_1 r_2 dr_1 dr_2. \quad (7.39)$$

Согласно [62] после соответствующих преобразований

$$P(\theta) = \sum_{n=0}^\infty P(n, \theta).$$

Здесь

$$P(n, \theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n_1, n'_1=0}^n G_{n_1 n'_1}^{(n)} \exp[i(n_1 - n'_1)\theta] \times \\ \times \langle n'_1, n - n'_1 | \hat{\rho} | n_1, n - n_1 \rangle, \quad (7.40)$$

$$G_{n_1 n'_1} = \frac{\Gamma((n_1 + n'_1)/2 + 1) \Gamma((n + 1 - (n_1 + n'_1)/2))}{[n_1! n'_1! (n - n_1)! (n - n'_1)!]^{1/2}}.$$

Структура (7.40) подобна структуре соотношения (7.7) и отличается только значениями коэффициентов  $G_{n_1 n'_1}^{(n)}$  (в соотношении Пегга–Барнетта они равны единице). Это различие коэффициентов отражает тот факт, что соотношение (7.5) соответствует распределению, которое можно получить путем точного измерения разности фаз, в то время как соотношение (7.7) относится к неточному измерению, характерному для совместного измерения амплитуды и фазы колебаний [68, 69].

#### 7.5. Операциональное определение разности фаз

Оригинальная схема измерения разности фаз, соответствующие операторы и результаты экспериментальных исследований описаны в [53, 71]. Схема включает в себя четыре светоделителя (BS) и четыре фотодетектора (D), а также четыре входных порта и четыре выходных (рис. 4). Исследуемые сигналы занимают только два входных порта, на оставшиеся два попадают вакуумные поля (01



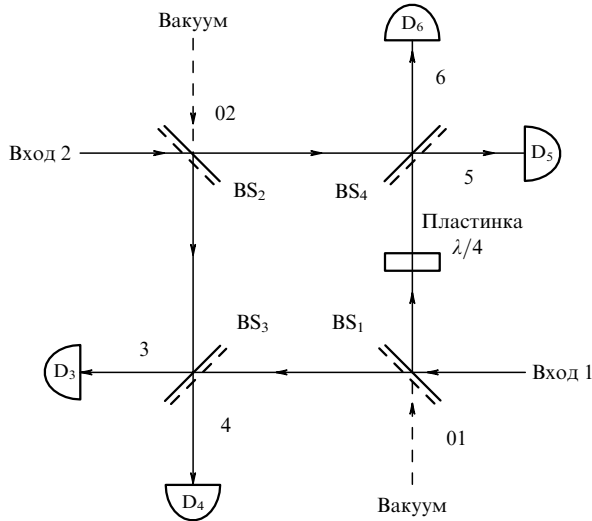


Рис. 4. Восьмипортовая схема измерения разности фаз [53].

и 02). Выходные моды 3–6 попадают на фотодетекторы  $D_3 - D_6$ . В одном из плеч интерферометра предусмотрен четвертьволновый сдвиг фазы.

Анализ с позиций классической оптики дает следующее соотношение между регистрируемыми энергиями  $W_j$  и косинусом и синусом разности фаз входных мод:

$$\frac{W_4 - W_3}{\sqrt{W_1 W_2}} = \cos(\phi_2 - \phi_1),$$

$$\frac{W_6 - W_5}{\sqrt{W_1 W_2}} = \sin(\phi_2 - \phi_1),$$

$$W_j \equiv \alpha \int_t^{t+T} I_j(\xi) d\xi, \quad j = 1, 2, \dots, 6.$$

Здесь  $I_j$  — интенсивность мод,  $T$  — временной интервал измерения,  $\alpha$  — квантовая эффективность детекторов.

Переход к квантовому описанию заключается в замене непрерывных значений  $W_j$  дискретными отсчетами фотодетекторов с последующей заменой их операторами числа квантов в модах. Определенный произвол допускается при замене  $W_1 W_2$  на

$$(\hat{n}_4 - \hat{n}_3)^2 + (\hat{n}_6 - \hat{n}_5)^2.$$

Измеряемые операторы записываются в виде

$$\hat{C}_M = \frac{\hat{n}_4 - \hat{n}_3}{[(\hat{n}_4 - \hat{n}_3)^2 + (\hat{n}_6 - \hat{n}_5)^2]^{1/2}}, \quad (7.41)$$

$$\hat{S}_M = \frac{\hat{n}_6 - \hat{n}_5}{[(\hat{n}_4 - \hat{n}_3)^2 + (\hat{n}_6 - \hat{n}_5)^2]^{1/2}}, \quad (7.42)$$

$$\hat{n}_4 - \hat{n}_3 = \frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger + \eta \hat{a}_{10}^\dagger)(\hat{a}_2 + \eta \hat{a}_{20}) + \text{H.c.},$$

$$\hat{n}_6 - \hat{n}_5 = \frac{1}{2}(-i \hat{a}_1^\dagger + i \eta \hat{a}_{10}^\dagger)(\hat{a}_2 + \eta \hat{a}_{20}) + \text{H.c.},$$

где  $\eta$  — фазовый множитель, отражающий сдвиг фаз в светоделителях.

При определении операторов в форме (7.41) и (7.42) эксперименты, при которых одновременно  $n_4 - n_3 = 0$  и

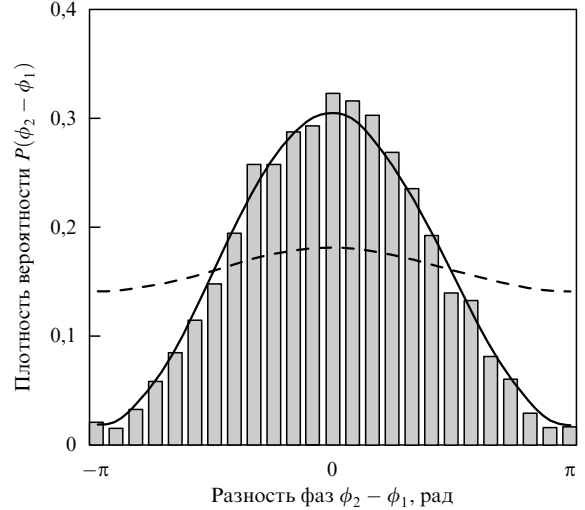


Рис. 5. Экспериментальные и теоретические распределения, полученные путем прямого измерения разности фаз между слабыми ( $|\alpha_1|^2 = 0,047, |\alpha_2|^2 = 0,076$ ) входными модами в когерентном состоянии: сплошная кривая — теоретическое распределение разности фаз по методу [71], штриховая — распределение по формуле Пегга – Барнетта (7.5).

$n_6 - n_5 = 0$ , исключались из статистической обработки и соответственно изменялась нормировка. Распределение разности фаз рассчитывалось через характеристическую функцию

$$C(x) = \langle (\hat{C}_M + i \hat{S}_M)^x \rangle.$$

Экспериментально двумя различными способами исследовалось распределение разности фаз двух слабых когерентных полей  $|\alpha_1\rangle$  и  $|\alpha_2\rangle$  для  $|\alpha_1|^2 = 0,047$  и  $|\alpha_2|^2 = 0,076$ .

На рисунке 5 представлены экспериментальные и теоретические распределения, полученные путем прямого измерения разности фаз между слабыми входными модами. Обе входные моды получались путем деления когерентного луча лазера на дополнительном светоделителе. Результаты эксперимента хорошо согласуются с расчетом по предложенным выше формулам, но заметно отличаются от рассчитанных по формуле Пегга – Барнетта (7.5) и противоречат представлению о большой неопределенности фаз в слабых полях.

Результаты эксперимента оказались настолько неожиданными, что дали повод поставить вопрос: "существует ли единственный оператор разности фаз для двух квантовых полей?" [71]. По нашему мнению, полученное узкое распределение разности фаз связано с тем, что при обработке экспериментальных данных отбрасывались нулевые отсчеты, маскирующие информацию о фазе. Подобная обработка имеет право быть, но остается вопрос, в какой мере ее результаты можно трактовать как распределение разности фаз между когерентными полями.

Во втором случае распределение разности фаз между слабыми модами измерялось косвенным путем. Сначала экспериментально находились распределения разности фаз между каждой из слабых мод и сильным когерентным полем (в схеме одна из слабых мод заменялась сильной). В этом случае распределения разности фаз фактически являлись распределениями фаз слабых волн. Затем вычислялось распределение разности фаз слабых

волн как распределение разности двух независимых случайных величин. Полученное распределение хорошо согласуется как с теоретическим распределением по методу [71], так и с распределением по Пеггу – Барнетту.

## 8. Обнаружение и оценивание сдвига фазы и разности фаз

### 8.1. Ошибки обнаружения и оценивания

*Задача обнаружения сдвига фазы* — частный случай общей проблемы проверки гипотез [17]. Она заключается в принятии на основе результатов измерения решения, в каком из двух возможных состояний находился объект: в состоянии  $\hat{\rho}_0$  или в сдвинутом по фазе состоянии  $\hat{\rho}_1$ . Ошибками принятого решения могут быть либо ложная тревога (решение  $H_1$  при состоянии  $\hat{\rho}_0$ ), либо пропуск сигнала (решение  $H_0$  при истинном состоянии  $\hat{\rho}_1$ ).

Средняя вероятность ошибки различения двух состояний равна [17, 19]

$$P_{\text{ед}} = \zeta_0 P(H_1 | \rho_0) + \zeta_1 P(H_0 | \rho_1),$$

где  $\zeta_0$  и  $\zeta_1$  — априорные вероятности состояний, а  $P(H_1 | \rho_0)$  и  $P(H_0 | \rho_1)$  — вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала соответственно. Вероятность ошибки зависит от различаемых состояний, от того, что измеряется, и от критерия принятия решения.

Определение метода оптимального измерения, дающего минимальную вероятность ошибки различения, решает квантовая теория оптимального обнаружения. Известны общее уравнение для оптимального измерения и нижний предел средней вероятности ошибки различения двух чистых состояний  $|\psi_0\rangle$  и  $|\psi_1\rangle$  [17, 19]:

$$P_{\text{ед}} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 - 4\zeta_0\zeta_1|\gamma|^2} \right], \quad \gamma = \langle \psi_0 | \psi_1 \rangle. \quad (8.1)$$

Безошибочно различаются только ортогональные состояния ( $\gamma = 0$ ).

В качестве меры ошибки различения используют также величину

$$D = \sqrt{1 - 4\zeta_0\zeta_1|\gamma|^2}, \quad (8.2)$$

которую называют различимостью [73]. Безошибочному различению состояний соответствует  $D = 1$ .

Другой мерой достоверности различения является так называемая измерительная различимость (а measured distinguishability)

$$D_m = \sum_i (P_0(X_i) - P_1(X_i)). \quad (8.3)$$

Здесь  $X_i$  — результаты измерения выбранной по каким-то соображениям наблюдаемой  $\hat{X}$ , а  $P_0(X_i)$  и  $P_1(X_i)$  — их распределения в соответствующих состояниях. При непрерывных значениях  $X_i$  сумма в (8.3) заменяется интегралом. Очевидно, что  $D_m \leq D$ . Равенство возможно только в случае, если  $\hat{X}$  — оптимальная наблюдаемая.

При различении по методу максимального правдоподобия не учитываются априорные вероятности состояний. Соответственно, в (8.1) и (8.3) следует положить

$\zeta_0 = \zeta_1 = 1/2$ . В этом случае

$$D = \sqrt{1 - |\gamma|^2}. \quad (8.4)$$

*Задачей оценивания физической величины* является вычисление оценки интересующей величины. Если в задаче обнаружения вероятный сдвиг фазы задан, то в задаче оценивания он неизвестен. Поскольку сдвиг фазы не изменяет вида распределения, а только меняет его параметр (среднее значение), задача оценивания сдвига фазы относится к квантовой задаче оценивания параметра сдвига (смещения) [17, 19].

Так же как и в случае обнаружения, квантовая теория оценивания решает задачу об оптимальном измерении, т.е. измерении, позволяющем получить наилучшую (по выбранному критерию) оценку. Если оценка производится по заранее полученным результатам эксперимента, то задача оценивания становится классической: нижний предел дисперсии оценки определяется неравенством Рао – Крамера. Этот классический предел не будет превосходить квантовый только в случае, если измерение было оптимальным.

Оптимальному измерению соответствует квантовый аналог неравенства Рао – Крамера [17–19]. При оценке параметра смещения  $\theta$  состояния  $|\psi_0\rangle$  к состоянию  $|\psi(\theta)\rangle = \exp(i\theta\hat{N})|\psi_0\rangle$  оно имеет вид

$$\Delta^2\tilde{\theta} \geq \left[ 4k \langle \psi(\theta) | \left( \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \theta} \right)^2 | \psi(\theta) \rangle \right]^{-1}, \quad (8.5)$$

где  $\tilde{\theta}$  — оценка параметра  $\theta$ , а  $\hat{\rho} = |\psi(\theta)\rangle\langle\psi(\theta)|$ . В случае если  $\hat{N}$  — оператор числа квантов,  $\theta$  есть параметр смещения фазы осциллятора. Поскольку смещение фазы на  $2\pi$  приводит к исходному состоянию, сдвиг фазы можно обнаружить только в пределах  $2\pi$ . Соответственно, дисперсия оценки должна относиться к тому же интервалу. Если этим пренебречь, то (8.5) дает

$$\Delta^2\tilde{\theta} \geq \frac{1}{4k\Delta^2n}, \quad (8.6)$$

где  $\Delta^2n$  — дисперсия числа квантов в исходном состоянии,  $k$  — число независимых измерений. Очевидно, что соотношение (8.6) имеет смысл только при  $\Delta n \gg 1$ . При  $\Delta n \rightarrow 0$  должно быть  $\Delta\tilde{\theta} \rightarrow \pi/\sqrt{3}$  в соответствии с равномерным распределением фазы.

Согласно (8.6) дисперсия оптимальной оценки смещения фазы чистого состояния зависит не от вида исходного состояния, а только от дисперсии числа квантов в нем. От исходного состояния зависит выбор оптимального измерения. При оптимальном оценивании смещения фазы оптимальным может быть измерение не фазы, а некоторой зависящей от нее комбинации наблюдаемых [19].

### 8.2. Условие достоверного различения сдвига фазы

Скалярное произведение исходного  $|\psi_0\rangle$  и сдвинутого по фазе  $|\psi(\theta)\rangle = \exp(i\theta\hat{N})|\psi_0\rangle$  векторов можно представить в виде среднего значения оператора  $\exp(i\theta\hat{N})$  на состоянии  $|\psi_0\rangle$ :

$$\gamma = \langle \psi_0 | \exp(i\theta\hat{N}) | \psi_0 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(i\theta n) P_0(n),$$

где  $P_0(n)$  — распределение числа фотонов в исходном состоянии.

Существует множество состояний, удовлетворяющих условию ортогональности  $\gamma = 0$ . В [74, 19] решена задача о минимальном значении  $P_{\text{ед}}$  при заданном значении  $\Delta n$ . Доказано, что

$$|\gamma|_{\min}^2 = \begin{cases} \cos^2(\Delta n \theta), & \Delta n \theta < \pi/2, \\ 0, & \Delta n \theta > \pi/2. \end{cases} \quad (8.7)$$

Соответствующим оптимальным состоянием  $|\psi_0\rangle$  при  $\Delta n \theta \leq \pi/2$  является состояние, в котором

$$P_0(n) = \frac{1}{2} [\delta(n - n_0 - \Delta n) + \delta(n - n_0 + \Delta n)]. \quad (8.8)$$

(При значениях  $\Delta n \theta > 1/2$  оптимальным будет другое состояние [74].)

Следовательно, достоверно можно различить детерминированный сдвиг фазы на

$$\theta \geq \frac{\pi}{2\Delta n} \geq \frac{\pi}{2n_0} = \frac{\pi}{2\langle n \rangle}. \quad (8.9)$$

Эта формула задает *квантовый предел достоверно различимого детерминированного сдвига фазы*. (Величина  $\pi/(2\langle n \rangle)$  близка к гейзенберговскому пределу неопределенности фазы (3.12), но не равна ему.) Соотношение, аналогичное (8.9), получено в [73].

Соотношение (8.7) предполагает как оптимальное исходное состояние, так и оптимальное измерение, которое (как видно из вышесказанного о фазовых состояниях) не является измерением фазы. Измерение фазы, т.е. применение вероятностно-операторной меры  $\hat{P}(\theta) = |\theta\rangle\langle\theta|$ , не является оптимальным даже при различении ортогональных состояний Пегга–Барнетта  $|\theta_s\rangle$  [73].

Оптимальному измерению соответствует вероятностно-операторная мера [17, 19]

$$\hat{P}(X) = \sum_{\eta_k > 0} |\eta_k\rangle\langle\eta_k|.$$

Здесь  $|\eta_k\rangle$  — собственные векторы оператора

$$\hat{\rho}_1(\theta) - l\hat{\rho}_0 = \sum_k \eta_k |\eta_k\rangle\langle\eta_k|,$$

где  $\hat{\rho}_0$  и  $\hat{\rho}_1(\theta)$  — статистические операторы исходного и смещенного состояний,  $l$  — действительное число, задающее порог принятия решения о сдвиге состояния. При обнаружении по критерию максимального правдоподобия  $l = 1$ . Решение о наличии сдвига фазы принимается, если в результате измерения получено  $\eta_k > 0$ . В [73] исследована различимость сдвига фазы некоторых известных состояний.

*Когерентное состояние* позволяет обнаружить с различимостью  $D < 1$  сдвиг фазы

$$\theta = \arccos \left( 1 - \frac{1}{2\langle \hat{n} \rangle} \ln \frac{1}{1 - D^2} \right). \quad (8.10)$$

Чтобы получить заданную различимость, среднее число фотонов должно быть не меньше чем  $(1/4) \ln[1/(1 - D^2)]$ . При достаточно больших значениях  $\langle \hat{n} \rangle$  асимптотическое

значение (8.10) равно

$$\theta = \left( -\frac{1}{\langle n \rangle} \ln(1 - D^2) \right)^{1/2}. \quad (8.11)$$

*Экспоненциальное состояние*

$$|\psi\rangle = A \sum_{n=0}^s \frac{1}{n+1} \exp(i\phi n) |n\rangle$$

( $A$  — нормирующий множитель), предлагавшееся как состояние для наиболее точного наблюдения сдвига фазы [75, 76], не оправдывает надежд. Даже при  $s \rightarrow \infty$  экспоненциальное состояние обеспечивает различимость не более  $D = \sqrt{3}/2$  для  $\theta = \pi$ .

*Фазокогерентное состояние*

$$|\psi\rangle = \sqrt{1 - x^2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \exp(i\beta n) |n\rangle,$$

где  $x$  и  $\beta$  — реальные числа и  $-1 < x < 1$ , при  $\langle n \rangle = x^2/(1 - x^2) \gg 1$  позволяет различить сдвиг фазы

$$\theta = \sqrt{\frac{D^2}{1 - D^2}} \frac{1}{\langle n \rangle}.$$

### 8.3. Различимость сдвига фаз в двухмодовых состояниях

Ошибки различимости двухмодовых состояний

$$|\psi_0\rangle = \sum_{n_1=0}^n c_{n_1} |n_1, n - n_1\rangle,$$

$$|\psi(\theta)\rangle = \sum_{n_1=0}^n \exp(i\theta n_1) c_{n_1} |n_1, n - n_1\rangle$$

определяются теми же соотношениями (8.1) и (8.3), что и в случае одномодовых состояний.

Необходимое условие достоверной различимости сдвига разности фаз выполняется для ортогональных состояний (7.21), (7.34) и (7.37). Минимальный достоверно различимый сдвиг разности фаз состояния (7.21) с общим числом фотонов  $n$  равен

$$\frac{2\pi}{n+1} = \frac{\pi}{\langle n_1 \rangle + 1/2} \simeq \frac{\pi}{\langle n_1 \rangle}, \quad (8.12)$$

где  $\langle n_1 \rangle$  — среднее число фотонов в одной моде. В состояниях (7.34) и (7.37) при том же значении  $n$  он почти в два раза меньше:

$$\frac{\pi}{n+2} \simeq \frac{\pi}{2\langle n_1 \rangle}.$$

С формальной точки зрения оба решения правильные. Каждому из вариантов соответствует свое оптимальное измерение, т.е. оптимальная вероятностно-операторная мера. Физическая реализуемость соответствующего измерения не гарантируется. Минимальный при заданной различимости сдвиг разности фаз известных неортогональных двухмодовых состояний рассчитан в [73].

Если двухмодовое поле формируется путем деления *когерентного* поля на 50%-ном светоделителе (на втором

входе которого вакуумное поле), то оно будет в состоянии

$$|\psi\rangle = \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle.$$

В результате сдвига фазы одной из мод получаем состояние

$$|\psi(\theta)\rangle = \exp(i\theta\hat{n}_1)|\psi\rangle.$$

В этом случае минимальный различимый с достоверностью  $D < 1$  сдвиг разности фаз совпадает с соотношением (8.10), если под  $\langle n \rangle$  понимать  $\langle n_1 \rangle = \langle n \rangle / 2$ .

Если при исходном когерентном поле для генерации двухмодового состояния и детектирования разности фаз используется обычный интерферометр Маха–Зендера, то сдвиг разности фаз при заданной измерительной различимости  $D_m$  равен

$$\theta \simeq 2 \left( -\frac{1}{\langle n \rangle} \ln(1 - D_m) \right)^{1/2},$$

что в  $\sqrt{2}$  раз больше, чем при оптимальном измерении. Это пример того, что в общем случае балансный интерферометр не является оптимальным устройством для измерения сдвига фаз [73].

В случае если входными полями светоделителя являются состояния  $|n\rangle$  и  $|0\rangle$ , формируемое поле будет в двухмодовом биномиальном состоянии. Оптимальная различимость исходного и сдвинутого на  $\theta$  по разности фаз состояний определяется соотношением [73]

$$D = \left( 1 - \cos^{2\langle n \rangle} \frac{\theta}{2} \right)^{1/2}.$$

Минимальный достоверно различимый сдвиг разности фаз здесь равен  $\pi$  независимо от значения  $\langle n \rangle$ . При заданном  $D < 1$  соответствующее значение  $\theta$  в два раза больше, чем в случае когерентного поля. Если вместо оптимального измерителя используется интерферометр Маха–Зендера, измерительная различимость при биномиальном поле и  $\langle n \rangle \gg 1$  будет такой же, как и при когерентном поле с тем же средним значением  $\langle n \rangle$ .

В качестве входного поля интерферометра, позволяющего приблизиться к гейзенберговскому пределу различимости сдвига фаз, предложено состояние  $|n, n\rangle$  ( $|n\rangle$ -состояния на каждом из двух входов, общее число фотонов равно  $2n$ ) [77–79]. В этом случае оптимальная различимость сдвига разности фаз [73]

$$D = (1 - L_n^2(\cos \theta))^{1/2},$$

где  $L_n(x)$  —  $n$ -й полином Лежандра. Достоверно можно различить сдвиг разности фаз, равный  $\theta \approx 4,8/\langle n \rangle$ , где  $\langle n \rangle = 2n$ . При этом в интерферометре Маха–Зендера с 50%-ным делителем перед фотодетекторами измерительная различимость  $D_m = D^2$ . Обе различимости обращаются в единицу при одном и том же значении  $\theta$ .

Экспериментальное исследование распределения разности фаз в двухмодовом поле, сформированном из входного поля  $|1, 1\rangle$ , описано в [72]. Двухмодовое состояние  $|1, 1\rangle$  в виде коротких импульсов генерировалось с помощью спонтанного вырожденного параметриче-

ского преобразования, в результате которого фотон накачки распадается на пару неразличимых фотонов, распространяющихся по разным направлениям. После поворота поляризации одной из мод на  $\pi/2$  моды смешивались на поляризационном светоделителе так, что на одном из выходных портов снова создавалось состояние  $|1, 1\rangle$ , но в базисе двух ортогональных линейно поляризованных мод.

Фазовый сдвиг между модами создавался с помощью жидкокристаллической двупреломляющей ячейки. Быстрая ось ячейки располагалась относительно векторов поляризации так, что состояние  $|1, 1\rangle$  преобразовывалось в состояние

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (-i \sin(2\xi)|0, 2\rangle + \sqrt{2} \cos(2\xi)|1, 1\rangle - i|2, 0\rangle).$$

Параметр  $\xi$  соответствует углу между быстрой осью ячейки и вертикальным вектором поляризации.

Угол  $\xi$  можно выбрать так, что состояние станет равномерным:

$$|\psi^{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (-i|0, 2\rangle + |1, 1\rangle - i|2, 0\rangle). \quad (8.13)$$

Фазовым сдвигом между модами можно управлять с помощью напряжения на ячейке. Смещенное по фазе первой моды состояние имеет вид

$$|\psi^{(2)}(\theta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (-i|0, 2\rangle + \exp(i\theta)|1, 1\rangle - i \exp(2i\theta)|2, 0\rangle). \quad (8.14)$$

После жидкокристаллической ячейки двухмодовое поле попадает на другой поляризационный светоделитель. Его характеристики таковы, что он преобразовывает состояние (8.13) обратно в состояние  $|1, 1\rangle$  с пространственным разнесенными модами. В этом случае стоящие за светоделителем фотодетекторы дают стопроцентное совпадение отсчетов. Вероятность совпадения отсчетов уменьшается с ростом смещения разности фаз. Исходное и смещенное состояния можно безошибочно различить, если они взаимно ортогональны.

Из (8.13) и (8.14) следует

$$|\gamma(\theta)|^2 = |\langle \psi^{(2)} | \psi^{(2)}(\theta) \rangle|^2 = \frac{\sin^2(3\theta/2)}{9 \sin^2(\theta/2)}. \quad (8.15)$$

Следовательно, состояния будут ортогональны при  $\theta = \pm 2\pi/3$ , что согласуется с (8.12). Если при таком сдвиге фазы вероятность совпадения фотоотсчетов равна нулю, то как оптимальная различимость  $D$ , так и измерительная различимость  $D_m$  в данной схеме будут равны единице.

Приведенные в [72] результаты эксперимента в виде зависимости числа совпадений от сдвига фаз соответствуют теории лишь качественно. Имеется максимум числа совпадений при  $\theta = 0$  и минимумы при  $\theta = \pm 2\pi/3$ . Однако если видность теоретической кривой равна единице, то видность экспериментальной составляет 45%. Тем не менее приведенные в [72] оценки влияния на видность различных технических эффектов доказывают, что в эксперименте все-таки наблюдались квантовые эффекты интерференции между модами.

#### 8.4. Симфотонные состояния в интерферометре Майкельсона

В измерительных схемах, в которых исследуемый эффект проявляется в виде изменения фазы волны, фактически используются волны в когерентном состоянии. Они проще генерируются и сохраняются. Однако эти волны обладают одним существенным недостатком: их разрешающая способность к сдвигу фазы обратно пропорциональна  $\sqrt{\langle n \rangle}$ , а не  $\langle n \rangle$ , как в гейзенберговском пределе. При необходимой чувствительности  $\Delta\theta$  мощность волны в когерентном состоянии должна быть обратно пропорциональной  $\Delta^2\theta$  и может оказаться недопустимо большой. Например, в лазерной гравитационной антенне (созданной в США, проект LIGO [80]) в интерферометре циркулирует мощность около 30 кВт.

Планируемое в перспективе увеличение чувствительности потребует увеличения мощности до 1 МВт. Если же вместо когерентного использовать оптимальное состояние, эту мощность можно было бы уменьшить до  $10^{-4}$  Вт! Оригинальный метод создания такого состояния поля в модифицированном интерферометре Майкельсона предложен в [81].

В основе метода лежит идея внутрирезонаторного невозмущающего измерения кроссквадратурной компоненты

$$\hat{\mathcal{X}}_{\pi/2} = i(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1). \quad (8.16)$$

Оператор  $\hat{\mathcal{X}}_{\pi/2}$  является частным случаем семейства операторов

$$\hat{\mathcal{X}}_\theta = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \exp(i\theta) + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \exp(-i\theta). \quad (8.17)$$

Эти операторы коммутируют с гамильтонианом двух мод:

$$[\hat{\mathcal{X}}_\theta, \hbar\omega(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2)] = 0, \quad (8.18)$$

т.е. являются интегралами движения и, соответственно, потенциально квантовыми невозмущаемыми наблюдаемыми [82, 19, 20].

Принципиальное отличие схемы невозмущающего измерения от обычных схем с фотодетекторами заключается в том, что измерение  $\hat{\mathcal{X}}_\theta$  одновременно является приготовлением состояния с хорошо определенным значением  $\mathcal{X}_\theta$ . Поэтому любое начальное состояние поля в резонаторе с помощью таких измерений можно преобразовать в состояние  $|\mathcal{X}_\theta\rangle$ .

Собственные состояния кроссквадратурных операторов имеют форму

$$|N, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^N n! (N-n)!}} (\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_2^\dagger \exp(-i\theta))^n \times (\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_2^\dagger \exp(-i\theta))^{N-n} |0, 0\rangle. \quad (8.19)$$

Здесь  $N$  — сумма квантов в системе,  $n$  — целое число от 0 до  $N$ . В состоянии (8.19) каждый из  $N$  фотонов имеет равные вероятности нахождения в каждой из мод. Однако амплитуды вероятностей для  $n$  квантов ортогональны амплитудам вероятностей для остальных  $N-n$  квантов. В связи с такой запутанностью между модами состояния (8.19) названы *симфотонными*. Собственные значения операторов  $\hat{\mathcal{X}}_\theta$  дискретны и равны  $n - (N-n) = 2n - N$ .

Симфотонные состояния чувствительны к изменению разности фаз между модами. Сдвиг фаз ведет к переходу между состояниями с различными значениями  $n$ . Изменение распределения фотонов можно обнаружить при измерении  $\hat{\mathcal{X}}_{\pi/2}$ . Вероятность таких переходов равна

$$p = 1 - |\langle N, n | \hat{U}(\phi_1, \phi_2 | N, n) \rangle|^2 = D^2,$$

где  $\hat{U}(\phi_1, \phi_2)$  — оператор сдвига разности фаз на  $\delta\varphi = \phi_2 - \phi_1$ . В случае  $\delta\varphi \ll 1$  вероятность

$$p = \frac{1}{4}(\delta\varphi)^2(N + 2n(N-n)).$$

Если  $n \simeq N/2$ , вероятность  $p \rightarrow 1$  при сдвиге фаз между модами  $\delta\varphi \simeq \sqrt{8/N}$ .

## 9. Заключение

Общий вывод из проведенного в настоящем обзоре обсуждения проблемы следующий. Единой теории фазы квантового осциллятора не существует. Имеющиеся подходы к проблеме фазы приводят к результатам, отличающимся не только количественно, но и качественно. Этот вывод подтверждает приведенный ниже перечень основных утверждений и формул теории фазы.

1. Фазе осциллятора нельзя сопоставить эрмитов оператор. Соответственно, нет ортогональных собственных состояний фазы, и даже теоретически невозможно точное измерение фазы. Фаза не является динамической наблюдаемой, подобной, например, координате. (Последнее утверждение некоторые физики считают слишком категоричным.)

2. Фазе можно сопоставить неортогональную вероятностно-операторную меру (3.7). С помощью вероятностно-операторной меры рассчитывается распределение фазы (3.6).

3. Эрмитовы операторы, сопоставляемые классическим косинусу и синусу фазы (4.4), не коммутируют между собой. Через них нельзя определить единственный оператор фазы. Распределение значений косинуса и синуса фазы невозможно рассчитать через распределение фазы (3.6).

4. Подход к фазе как параметру в фазовом пространстве приводит к распределению фазы как маргинальному распределению от квазивероятностей. Маргинальные распределения во многих случаях удовлетворительно согласуются с экспериментом, но в ряде случаев дают отрицательное значение вероятности.

5. Подход к разности фаз в двухмодовых полях как разности фаз отдельных мод приводит к неортогональным состояниям (7.6) с непрерывными значениями разности фаз. Распределение разности фаз в произвольных состояниях поля определяется соотношением (7.5).

6. Подход к разности фаз как физической наблюдаемой позволяет найти эрмитов оператор разности фаз (7.24). Этот оператор коммутирует с оператором общего числа фотонов двухмодового поля и имеет дискретные собственные значения. Однако пределом данного оператора (когда число возбуждений в одной из мод стремится к бесконечности) является неэрмитов оператор разности фаз.

7. Эрмитовы операторы, сопоставляемые классическим косинусу и синусу разности фаз (7.31) и (7.32), не коммутируют между собой. Дискретность собственных

значений этих операторов отличается от дискретности собственных значений оператора разности фаз.

Каким же должен быть ответ на поставленный в названии обзора вопрос: что представляет собой "на самом деле" фаза (и разность фаз)? Общепринятого ответа на этот вопрос нет. На наш взгляд, логично утверждение, что все предсказываемые теорией свойства фазы имеют физический смысл, если возможны измерения, реализующие соответствующую данному свойству вероятностно-операторную меру. Ключевым является вопрос о реализуемости таких измерений. Существующие методы измерения фазы заключаются в совместном (соответственно, приближенном) измерении амплитуды и фазы или совместном измерении квадратурных амплитуд. Получаемые экспериментально распределения фазы и разности фаз удовлетворительно согласуются с распределениями, рассчитанными соответственно по формулам (3.6) и (7.5).

Автор выражает большую благодарность В.Б. Брагинскому и Ф.Я. Халили, взявшим на себя труд ознакомиться с рукописью обзора и давшим ряд ценных советов по его содержанию.

## Список литературы

- Dirac P A M *Proc. R. Soc. London Ser. A* **114** 243 (1927)
- London F Z. *Phys.* **37** 915 (1926); **40** 193 (1927)
- Robertson H P *Phys. Rev.* **34** 163 (1929)
- Heitler W *The Quantum Theory of Radiation* (Oxford: The Clarendon Press, 1936) p. 67
- Sarfatt J *Nuovo Cimento* **27** 1119 (1963)
- Susskind L, Glogower J *Physics* **1** 49 (1964)
- Carruthers P, Nieto M M *Am. J. Phys.* **33** 537 (1965)
- Carruthers P, Nieto M M *Rev. Mod. Phys.* **40** 411 (1968)
- Pegg D T, Barnett S M *J. Mod. Opt.* **44** 225 (1997)
- Newton R G *Ann. Phys.* (New York) **124** 327 (1980); Barnett S M, Pegg D T *J. Phys. A: Math. Gen.* **19** 3849 (1986)
- Garrison J C, Wong J J *Math. Phys.* **11** 2242 (1970)
- Попов В Н, Ярунин В С *Вестник ЛГУ. Сер. Физ., хим.* **22** 7 (1973); *ТМФ* **89** 395 (1991)
- Pegg D T, Barnett S M *Phys. Rev. A* **39** 1665 (1989); Barnett S M, Pegg D T *J. Mod. Opt.* **36** 7 (1989)
- Glauber R J *Phys. Rev.* **131** 2766 (1963)
- Barnett S M, Dalton B J *Phys. Scripta* **T48** 13 (1993)
- Drummond P D, Gardiner C W *J. Phys. A: Math. Gen.* **13** 2353 (1980)
- Хелстром К *Квантовая теория проверки гипотез и оценивания* (М.: Мир, 1979) [Helstrom C W *Quantum Detection and Estimation Theory* (New York: Academic Press, 1976)]
- Холево А С *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории* (М.: Наука, 1980) [Holevo A S *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1982)]
- Воронцов Ю И *Теория и методы макроскопических измерений* (М.: Наука, 1989)
- Braginsky V B, Khalili F Ya *Quantum Measurement* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992)
- Менский М В *Квантовые измерения и декогеренция* (М.: Физматлит, 2001) [Mensky M V *Quantum Measurements and Decoherence: Models and Phenomenology* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000)]
- Кулага А А, Дисс. ... канд. физ.-мат. наук (М.: Физический факультет МГУ, 1998)
- Люиселл У *Излучение и шум в квантовой электронике* (М.: Наука, 1972) [Louisell W H *Radiation and Noise in Quantum Electronics* (New York: McGraw-Hill, 1964)]
- Beck M et al. *Opt. Lett.* **18** 1259 (1993)
- Кулага А А *Вестник МГУ. Сер. 3. Физ. Астрон.* **34** (5) 12 (1993)
- Кулага А А, Халили Ф Я *ЖЭТФ* **104** 3358 (1993)
- Bialynicki-Birula I, Freyberger M, Schleich W *Phys. Scripta* **T48** 113 (1993)
- Daeubler B et al. *Phys. Scripta* **T48** 119 (1993)
- Collett M J *Phys. Scripta* **T48** 124 (1993)
- Agarwal G S, Scully M O, Walther H *Phys. Scripta* **T48** 128 (1993)
- Buzek V, Gantsog Ts, Kim M S *Phys. Scripta* **T48** 131 (1993)
- Barnett S M, Pegg D T *J. Mod. Opt.* **36** 7 (1989)
- Ахиезер Н И, Глазман И М *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве* 2-е изд. (М.: Наука, 1966)
- Vaccaro J A, Pegg D T *Phys. Scripta* **T48** 22 (1993)
- Vorontsov Yu I, Rembovsky Yu A *Phys. Lett. A* **254** 7 (1999)
- Vaccaro J A, Pegg D T, Barnett S M *Phys. Lett. A* **262** 483 (1999)
- Vorontsov Yu I, Rembovsky Yu A *Phys. Lett. A* **262** 486 (1999)
- Vorontsov Yu I, Rembovsky Yu A *Phys. Lett. A* **285** 251 (2001)
- Schleich W, Horowicz R J, Varro S *Phys. Rev. A* **40** 7405 (1989)
- Herzog U, Paul H, Richter Th *Phys. Scripta* **T48** 61 (1993)
- Agarwal G S et al. *Phys. Rev. A* **45** 4904 (1992)
- Wigner E *Phys. Rev.* **40** 749 (1932); Hillery M et al. *Phys. Rep.* **106** 121 (1984)
- Glauber R J *Phys. Rev.* **130** 2529 (1963); Sudarshan E C G *Phys. Rev. Lett.* **10** 277 (1963)
- Kano Y *J. Math. Phys.* **6** 1913 (1965); Mehta C L, Sudarshan E C G *Phys. Rev.* **138** B274 (1965)
- Drummond P D, Gardiner C W *J. Phys. A: Math. Gen.* **13** 2353 (1980)
- Garraway B M, Knight P L *Phys. Scripta* **T48** 66 (1993)
- Leonhardt U, Paul H *Phys. Scripta* **T48** 45 (1993)
- Schleich W, Bandilla A, Paul H *Phys. Rev. A* **45** 6652 (1992)
- Agarwal G S, Tara K *Phys. Rev. A* **47** 3160 (1993)
- Lalovic D I, Davidovic D M, Tancic A R *Phys. Rev. Lett.* **81** 1223 (1998)
- Gerhardt H, Büchler U, Litfin G *Phys. Lett. A* **49** 119 (1974)
- Shapiro J H, Wagner S S *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-20** 803 (1984)
- Noh J W, Fougères A, Mandel L *Phys. Rev. A* **45** 424 (1992); *Phys. Rev. Lett.* **67** 1426 (1991); *Phys. Rev. A* **46** 2840 (1992); *Phys. Scripta* **T48** 29 (1993)
- Bandilla A *Phys. Scripta* **T48** 49 (1993)
- Smithey D T et al. *Phys. Scripta* **T48** 35 (1993)
- Vogel K, Risken H *Phys. Rev. A* **40** 2847 (1989)
- Natterer F *The Mathematics of Computerized Tomography* (New York: Wiley, 1986)
- Vaccaro J A, Pegg D T *Phys. Scripta* **T48** 22 (1993)
- Braginsky V B, Khalili F Ya, Kulaga A A *Phys. Lett. A* **202** 1 (1995)
- Kulaga A A *Phys. Lett. A* **202** 7 (1995)
- Collett M J *Phys. Scripta* **T48** 124 (1993)
- Luis A, Sánchez-Soto L L *Phys. Rev. A* **53** 495 (1996)
- Luis A, Sánchez-Soto L L *Phys. Rev. A* **48** 4702 (1993); Sánchez-Soto L L, Luis A *Opt. Commun.* **105** 84 (1994)
- Клаудер Дж, Сударшан Э *Основы квантовой оптики* (М.: Мир, 1970) [Klauder J R, Sudarshan E C G *Fundamentals of Quantum Optics* (New York: W.A. Benjamin, 1968)]
- Vourdas A *Phys. Rev. A* **41** 1653 (1990)
- Luis A, Sánchez-Soto L L *Phys. Rev. A* **47** 1492 (1993)
- Caves C M, Schumaker B L *Phys. Rev. A* **31** 3068 (1985); Schumaker B L, Caves C M *Phys. Rev. A* **31** 3093 (1985)
- Leonhardt U et al. *Phys. Rev. A* **51** 84 (1995)
- Busch P, Grabowski M, Lahti P J *Ann. Phys.* (New York) **237** 1 (1995)
- Noh J W, Fougères A, Mandel L *Phys. Scripta* **T48** 29 (1993)
- Torgerson J R, Mandel L *Phys. Rev. Lett.* **76** 3939 (1996)
- Трифонов А и др. *Оптика и спектроскоп.* **87** 666 (1999)
- Björk G et al. *Quantum Semicl. Opt.* **10** 705 (1998)
- Воронцов Ю И, Халили Ф Я *Вестник МГУ. Сер. 3. Физ. Астрон.* **26** (3) 3 (1985)
- Schapiro J H, Shepard S R, Wong N C *Phys. Rev. Lett.* **62** 2377 (1989)

76. Schleich W P, Dowling J P, Horowicz R J *Phys. Rev. A* **44** 3365 (1991)
77. Yuen H P *Phys. Rev. Lett.* **56** 2176 (1986)
78. Yurke B, McCall S L, Klauder J R *Phys. Rev. A* **33** 4033 (1986)
79. Holland M J, Burnett K *Phys. Rev. Lett.* **71** 1355 (1993)
80. Брагинский В Б *УФН* **170** 743 (2000)
81. Braginsky V B, Gorodetsky M L, Khalili F Ya *Phys. Lett. A* **246** 485 (1998)
82. Braginsky V B, Vorontsov Yu I, Thorne K S *Science* **209** 547 (1980)

### The phase of an oscillator in quantum theory. What is 'in reality'?

**Yu.I. Vorontsov**

*Physics Department, M.V. Lomonosov Moscow State University,  
Vorob'evy Gory, 119892 Moscow, Russian Federation  
Tel. (7-095) 939-3903  
E-mail: yury@hbar.phys.msu.su*

An analysis of the current theory of the quantum oscillator phase is presented. Predictions using existing approaches to the phase problem differ not only quantitatively but also qualitatively. The question in the title has not yet been given a generally accepted answer. However, it is logical to argue that all the theoretically predicted properties of the phase are physically meaningful if appropriate measurements are possible. Current phase measurement methods either involve the simultaneous (approximate) measurement of the amplitude and the phase or rely on the simultaneous measurement of quadrature amplitudes.

PACS numbers: **03.65.-w**, **42.50.-p**, 42.50.Dv

Bibliography — 82 references

*Received 6 March 2002*