

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Диссипация и декогеренция квантовых систем

М.Б. Менский

*Обзор посвящен теории диссипативных квантовых систем и ее связи с квантовой теорией непрерывных измерений. Корректную теорию квантовой диссипативной системы удастся построить, учитывая ее взаимодействие с окружающей средой (резервуаром). Поскольку в состоянии резервуара "записывается" информация о системе, действие на нее резервуара можно учитывать в рамках квантовой теории непрерывных измерений. Если основывать такую теорию на ограниченных интегралах по путям, то она не требует явной модели резервуара и потому становится технически гораздо более простой.*

PACS numbers: 03.65.-w, 03.65.Ta, 03.65.Yz

## Содержание

## 1. Введение (1199).

1.1. "Квантование" диссипативной системы. 1.2. Модели взаимодействия с резервуаром. 1.3. Модельно-независимая теория измерений.

## 2. Модели резервуара (1203).

2.1. Модель Калдейры–Леггета. 2.2. Диссипация и декогеренция. 2.3. Декогеренция внутренней структурой атомов.

## 3. Диссипация — из теории непрерывных измерений (1206).

3.1. Измерение и ограниченные интегралы по путям. 3.2. Мониторинг наблюдаемой. 3.3. Неминимально-возмущающее измерение. 3.4. Гармонический осциллятор с трением. 3.5. Осциллятор при тепловом равновесии.

## 4. Открытая система как измеряемая (1213).

4.1. Эволюция открытой системы. 4.2. Декогеренция. 4.3. Парциальные функционалы влияния и ограниченные интегралы по путям. 4.4. Декогеренция альтернатив и измерение.

## 5. Заключение (1218).

## Список литературы (1218).

## 1. Введение

Мы представляем обзор по теории диссипативных квантовых систем, целью которого является показать, что фундаментальная квантовая теория диссипации должна быть универсальной (не зависеть от модели) и что такая модельно-независимая теория фактически совпадает с квантовой теорией непрерывных измерений.

Первые попытки построить квантовую теорию диссипативных систем состояли в поисках метода квантования классических диссипативных уравнений, которые содержат силу трения, зависящую от скорости. Они

неизменно сталкивались с трудностями и фактически были обречены на неудачу, потому что вступали в противоречие с принципом неопределенности. Ведь в квантовой механике положение и скорость нельзя определить одновременно с любой точностью, поэтому не может существовать сила, зависящая от скорости.

Затем научились описывать диссипацию квантовой системы, явно вводя в рассмотрение ее окружение (резервуар), взаимодействие с которым и является физической причиной диссипации. Это было технически чрезвычайно сложно ввиду огромного числа степеней свободы резервуара. Однако уравнения для самой диссипативной системы, которые получались после того, как резервуар устранялся из рассмотрения (процедурой редукции), оказывались простыми и мало зависели от модели резервуара (см., например, [1, 2]).

Универсальность квантовой диссипации можно было бы, в сущности, предвидеть, потому что она являлась следствием того же принципа неопределенности, который делал невозможным прямое квантование диссипативных уравнений. Действительно, сила трения, действующая на квантовую систему (со стороны резервуара) не может быть пропорциональна скорости, но должна становиться такой в классическом пределе. Это означает, что сила трения должна содержать квантовые флуктуации, не существенные в классическом пределе. Однако весь опыт квантовой механики показывает, что квантовые флуктуации всегда обусловлены принципом неопределенности и не зависят от того, с помощью каких физических объектов они реализуются. Следовательно, эффекты диссипации тоже должны быть универсальными, не зависящими от конкретной модели резервуара<sup>1</sup>.

Подход, в котором диссипация с самого начала описывается универсальным, не зависящим от модели,

М.Б. Менский. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН  
119991 Москва, Ленинский просп. 53, Российская Федерация  
Тел. (095) 132-62-19. Факс (095) 135-78-80  
E-mail: mensky@lebedev.ru

Статья поступила 23 мая 2003 г.

<sup>1</sup> Я благодарен В.А. Намиоту, который обратил мое внимание на важную роль принципа неопределенности как в невозможности квантования диссипативных уравнений, так и в универсальности диссипации.

способом, — это *квантовая теория непрерывных измерений* [3–5]. Его эффективность в применении к диссипации основана на том, что взаимодействие квантовой системы с (макроскопическим или мезоскопическим) окружением всегда является измерением этой системы в том смысле, что в окружении (резервуаре) остается информация о ней. В квантовой теории измерения доказывается, что обратное влияние окружения на систему (ее возмущение) состоит из двух частей: 1) минимального возмущения, которое зависит только от результата измерения (т.е. от того, какая информация о системе остается в ее окружении) стандартным образом, и 2) неминимального возмущения, зависимость которого от результата измерения описывается легко, особенно в линейном приближении (что оправдано при слабом взаимодействии с окружением). Это позволяет описать динамику диссипативной квантовой системы простым образом.

Такой подход удобно формулировать в терминах *ограниченных интегралов по путям*, потому что в квантовой механике интегралы по путям обладают огромной эвристической силой. Однако для конкретных вычислений интегралы по путям не являются необходимыми. Вместо этого можно использовать эффективное (с измененным гамильтонианом) уравнение Шрёдингера для вектора состояния или уравнение для матрицы плотности, включающее, кроме обычного коммутатора матрицы плотности с гамильтонианом, еще дополнительные члены.

Представление эволюции диссипативной системы при помощи ограниченных интегралов по путям или комплексного гамильтониана является селективным, т.е. учитывает результат измерения (конечное состояние резервуара). Это проявляется в том, что система описывается вектором состояния  $|\psi_\alpha\rangle$ , который зависит от результата измерения  $\alpha$ . Неселективное описание получается, если представить эволюцию вместо вектора состояния "парциальной" матрицей плотности  $\rho_\alpha = |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|$ , а затем перейти к полной матрице плотности:  $\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha$ . Неселективное описание является менее детализированным, но во многих (хотя и не во всех) случаях большей детализации и не требуется.

Использование ограниченных интегралов по путям (или комплексных гамильтонианов) не требует модели резервуара и поэтому позволяет построить сравнительно простую технически и, главное, модельно-независимую теорию диссипации квантовых систем. Как и в классическом случае, такая теория позволяет описывать диссипативную квантовую систему в терминах, характерных лишь для этой системы, не обращая явно к степеням свободы ее окружения, однако корректно учитывая их влияние.

В связи со сказанным обзор строится следующим образом. В оставшейся части введения мы конкретизируем соображения, приведенные выше, и дадим основные ссылки на литературу. В разделе 2 мы рассмотрим модели резервуаров (главным образом наиболее популярную модель Калдейры–Леггета) и уравнения для диссипативных систем, которые из них следуют. При этом мы не будем входить в детали построения моделей, а ограничимся лишь общей схемой этого построения, кратко охарактеризовав сделанные предположения. В разделе 3 мы изложим теорию диссипации, основанную на ограниченных интегралах по путям и не завися-

щую от моделей резервуара. Наконец, в разделе 4 мы покажем, что теория, использующая ограниченные интегралы по путям, является общей, т.е. применима к любой открытой системе, если только окружение этой системы (резервуар) является макроскопическим или хотя бы мезоскопическим.

Центральным является раздел 3, дающий универсальную (не зависящую от модели) теорию, однако понимание его будет легче, если читатель прочтет предварительно раздел 2, где вводятся некоторые важные термины (такие, как декогеренция) и обсуждаются физические причины происходящих явлений. Раздел 4 (технически самый сложный) при первом чтении можно пропустить без всякого ущерба для понимания основной части статьи.

### 1.1. "Квантование" диссипативной системы

Простой и в то же время наиболее важный пример диссипативной системы — это частица, движущаяся в вязкой среде. Классическое описание такой частицы в одномерном случае дается уравнением

$$m\ddot{q} + 2m\gamma\dot{q} + V'(q) = F(t), \quad (1)$$

где  $m$  — масса частицы,  $q$  — ее координата,  $\gamma$  — коэффициент трения,  $V(q)$  — потенциал, действующий на частицу. Через  $F(t)$  обозначена случайная сила, действующая на частицу со стороны молекул среды. Статистические характеристики случайной функции  $F(t)$  зависят от коэффициента трения и температуры среды:

$$\langle F(t) \rangle = 0, \quad \langle F(t)F(t') \rangle = 4m\gamma kT \delta(t - t'). \quad (2)$$

Уравнение (1) с дополнительными условиями (2) называется уравнением Ланжевена и используется в теории броуновского движения.

При низких температурах становятся существенными квантовые эффекты в поведении частицы. Для их описания необходима квантовая теория частицы, движущейся в среде. Проблема построения такой теории и вообще квантовой теории диссипативных систем долгое время оставалась нерешенной. Для ее решения предлагались различные подходы, которые лишь в последние десятилетия привели к успеху.

Сначала для построения квантовой теории диссипации пытались распространить на диссипативные системы различные способы "квантования" классических динамических систем. Однако при обычном способе квантования классической системы используется ее гамильтониан. Диссипативная система является негамильтоновой, и поэтому обычный способ квантования оказывался в этом случае неприменим. Правда, формально уравнения типа (1) можно получить из некоторых гамильтонианов, зависящих от времени или содержащих дополнительные переменные, и в некоторых работах это использовалось для построения квантовой теории диссипативных систем [6–8]. Кроме того, предлагались подходы, основанные на нелинейном уравнении Шрёдингера [9, 10] и комплексных наблюдаемых [11]. Однако такие подходы являются формальными и приводят к ряду трудностей, например, с соотношением неопределенностей [12]. Еще одно направление поисков "квантового уравнения Ланжевена" заключалось в попытках обобщения условий (2) (см., например, [13, 14]).

По-видимому, трудности непосредственного квантования классических систем, подвергающихся диссипации, являются принципиальными. Возможно, главной причиной, почему они не привели (и, возможно, не могут привести) к успеху, является тот факт, что квантовая теория предполагает выполнение принципа неопределенности, тогда как диссипативные теории, описываемые классически, этому принципу противоречат (см. сноску 1). Например, в уравнении (1) второй член описывает силу трения, которая пропорциональна скорости частицы. Динамика частицы, описываемой таким уравнением, предполагает, что в любой момент времени должны быть одновременно определены ее координата и скорость. В квантовой механике это невозможно сделать с любой точностью, что и ведет к трудностям при квантовании уравнения (1). Это рассуждение не является доказательством такой невозможности, но указывает на источник возникающих при этом принципиальных трудностей (в этой связи см. работу [12]).

Физическая природа диссипации состоит в том, что на систему влияет ее окружение. Например, уравнение (1) для частицы, испытывающей трение, является следствием того, что на эту частицу действуют атомы среды, через которую она движется. Ясно, что надежный путь построения квантовой теории диссипации состоит в том, чтобы при помощи корректных квантовомеханических методов учесть влияние на систему ее окружения (резервуара).

## 1.2. Модели взаимодействия с резервуаром

Физически наиболее убедительными (но сложными и зависящими от моделей) являются подходы к теории диссипации, в которых непосредственно используется то существенное обстоятельство, что диссипация в системе возникает из-за взаимодействия этой системы с ее окружением<sup>2</sup> (резервуаром). Система, которая нас интересует, является, таким образом, открытой. Для расчета ее поведения следует рассмотреть замкнутую систему, включающую также и резервуар, а затем совершить редукцию, т.е. просуммировать по степеням свободы резервуара. В результате мы получим описание интересующей нас (под)системы при помощи редуцированной матрицы плотности.

Уточним сказанное. Замкнутая система  $S + \mathcal{E}$ , состоящая из интересующей нас системы  $S$  и ее окружения (environment)  $\mathcal{E}$ , может представляться вектором состояния. Пусть это вектор состояния  $|\Psi\rangle$ . Вместо него то же самое состояние полной системы можно представить матрицей плотности  $\hat{\mathcal{R}} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ . Чтобы перейти к описанию лишь интересующей нас подсистемы  $S$ , мы должны просуммировать матрицу плотности  $\hat{\mathcal{R}}$  по степеням свободы системы  $\mathcal{E}$ , т.е. взять частичный след полной матрицы плотности<sup>3</sup>:

$$\hat{\rho} = \text{Tr}_{\mathcal{E}} \hat{\mathcal{R}}. \quad (3)$$

<sup>2</sup> В некоторых случаях роль диссипирующей системы и ее окружения, вызывающего диссипацию, могут играть различные степени свободы одной и той же материальной системы.

<sup>3</sup> Если векторы  $|\psi_i\rangle$  составляют ортонормированный базис пространства состояний системы  $S$ , а векторы  $|\Phi_a\rangle$  — аналогичный базис для  $\mathcal{E}$ , то полный след  $\text{Tr} \hat{\mathcal{R}} = \sum_{ai} \mathcal{R}_{ai, ai}$  матрицы плотности  $\hat{\mathcal{R}}$  равен единице, а частичный след определяется как  $(\text{Tr}_{\mathcal{E}} \hat{\mathcal{R}})_{ij} = \sum_a \mathcal{R}_{ai, aj}$ .

Получающийся оператор  $\hat{\rho}$  представляет собой редуцированную матрицу плотности системы  $S$ . Среднее значение любой наблюдаемой  $\hat{A}$  этой системы по состоянию  $|\Psi\rangle$  выражается через ее редуцированную матрицу плотности как

$$\langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle = \langle\hat{A}\rangle_{\hat{\rho}} = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}). \quad (4)$$

Предпринималось много попыток построить теорию диссипативных систем в рамках подхода, когда рассматривается система вместе с ее окружением (резервуаром), а затем производится редукция, исключая резервуар из описания (но учитывающая его влияние). В качестве примеров реализации такой программы приведем работы [15–19]. Обзор работ на эту тему можно найти в [20–22]. Одной из наиболее успешных оказалась модель квантовой диффузии, предложенная в 1983 г. Калдейрой и Леггетом [1, 2] (см. также [23], где эта модель обсуждается с точки зрения теории "квантовых историй" Гелл-Манна и Хартла [24]). Мы обсудим модель Калдейры–Леггета в разделе 2.

В последние десятилетия такого рода модели применялись также для описания физической природы квантовых измерений (см., например, [25–31], обзоры можно найти в [32, 33]). Дело в том, что измерение квантовой системы осуществляется посредством взаимодействия этой системы с ее окружением, которое играет роль измерительного прибора<sup>4</sup>. Правда, в теории измерений существенно не только поведение измеряемой системы, но и поведение окружения, так как именно его состояние представляет результат измерения. Однако для того чтобы понять физику происходящего, часто отвлекались от того, в каком конкретно состоянии оказывалось окружение измеряемой системы. Поэтому, описав обычными квантовомеханическими методами эволюцию составной системы, содержащей измеряемую систему и ее окружение, производили затем редукцию, т.е. суммировали по всем возможным состояниям окружения. Совершенно ясно, что, хотя целью такого рода рассмотрения является описание природы измерения, в качестве "побочного", но очень важного результата оно должно дать описание измеряемой квантовой системы как системы диссипативной<sup>5</sup>.

Следует отметить, что наиболее общее дифференциальное уравнение для матрицы плотности, обобщающее уравнение фон Неймана на случай диссипативной квантовой системы, было найдено Линдбладом [34] в 1976 г. без использования какой бы то ни было модели. При своем чисто математическом анализе он предполагал, что процесс описывается полугруппой операторов эволюции, и накладывал условие сохранения положительности матрицы плотности. Линдблад показал, что эти требования выполняются в том и только в том случае,

<sup>4</sup> При более детальном описании это окружение представляется как совокупность квантовой системы, играющей роль чувствительного элемента, и резервуара, который содержит большое число степеней свободы, что ведет к появлению классических черт системы.

<sup>5</sup> Правда, главным в квантовой теории измерений является появление классических черт системы, что в настоящее время принято характеризовать термином "декогеренция", тогда как собственно диссипация возникает при измерении как сопутствующее явление, но, строго говоря, не обязательно. Мы рассмотрим это подробнее ниже (см., например, раздел 2.2).

если уравнение для матрицы плотности имеет вид

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] - \sum_i (\hat{L}_i^\dagger \hat{L}_i \hat{\rho} - 2\hat{L}_i \hat{\rho} \hat{L}_i^\dagger + \hat{\rho} \hat{L}_i^\dagger \hat{L}_i), \quad (5)$$

где  $\hat{H}$  — гамильтониан системы, а  $\hat{L}_i$  — операторы, описывающие ее диссипацию. Конкретный вид этих операторов означает конкретизацию диссипативного процесса, т.е. косвенную характеризацию окружения системы и ее взаимодействия с этим окружением.

Уравнения для матрицы плотности, которые выводятся в конкретных моделях резервуара, в том числе в модели Калдейры–Леггета, часто не принадлежат данному классу, что объясняется приближениями, которые приняты при построении моделей. Такие уравнения хорошо описывают широкий круг явлений, например в квантовой оптике, и позволяют понять физическую природу диссипации в квантовых системах. Для некоторых специфических ситуаций, однако, они могут оказаться неприменимыми из-за того, что не являются уравнениями типа уравнения Линдблада и потому при некоторых специальных начальных условиях могут не сохранять положительности матрицы плотности. Обсуждение возникающих при этом трудностей можно найти в работах [35–38]. Заметим, что этим дефектом не обладают уравнения, которые выводятся в рамках модельно-независимой теории непрерывных измерений, к которой мы переходим.

### 1.3. Модельно-независимая теория измерений

Оказывается, что учесть влияние резервуара (окружения) на квантовую систему и тем самым ее диссипацию можно и без рассмотрения конкретной модели резервуара и взаимодействия с ним. Это делается в квантовой теории непрерывных измерений. Обзор различных подходов к этой теории можно найти в [3, 4]. Простейший из подходов состоит в том, чтобы приближенно представить непрерывное измерение как серию мгновенных (кратких) измерений, каждое из которых описывается редукцией фон Неймана (см., например, [30, 39]). Впрочем, верно и обратное: многие (но не все) реальные примеры непрерывных измерений представляют собой на самом деле серию кратких взаимодействий (скажем, столкновений с молекулами газа), каждое из которых можно рассматривать как измерение. Если длительностью такого "элементарного" измерения пренебречь, то его можно представить как мгновенное; если же учесть эту длительность, то каждое краткое измерение также оказывается непрерывным. В любом случае всю серию взаимодействий можно интерпретировать как непрерывное измерение (см. [3, гл. 8]).

Таким образом, описание непрерывного измерения как серии мгновенных измерений возможно. Однако в таком описании эволюция измеряемой системы представляется произведением

$$|\psi_t\rangle = U(t, t_N) P_{i_N} U(t_N, t_{N-1}) \dots U(t_3, t_2) P_{i_2} U(t_2, t_1) P_{i_1} U(t_1, 0) |\psi_0\rangle \quad (6)$$

большого (в пределе бесконечного) числа операторов: операторы эволюции свободной системы на малых отрезках времени перемежаются с проекторами фон Неймана, соответствующими мгновенным измерениям. Такое описание часто бывает громоздко и неконструктивно.

В порядке реализации идеи Фейнмана [40] автором была развита квантовая теория непрерывных измерений, основанная на ограниченных интегралах по путям [41, 42, 3, 4]. Мы рассмотрим эту теорию и ее приложение к описанию диссипативных систем в разделах 3 и 4.

В этом подходе пропагатор системы, подвергающейся непрерывному измерению (т.е. открытой, взаимодействующей с окружением), представляется интегралом по путям типа фейнмановского интеграла [40, 43], но с интегрированием лишь по тем путям, которые совместимы с результатом измерения. Возникающие при этом ограниченные интегралы по путям дают описание очень широкого класса открытых квантовых систем и, в частности, эффективно представляют диссипацию квантовой системы. При этом описание такой системы производится в терминах лишь ее самой. Явная модель окружения (резервуара) не требуется. Вместо этого влияние окружения на эволюцию системы характеризуется тем, какая информация о состоянии системы остается в ее окружении (закодированная в состоянии этого окружения).

Важно понимать, что такой подход позволяет описывать не только ситуации, в которых окружение системы специально сконструировано для ее измерения, но и такие, в которых процесс типа измерения происходит в результате неконтролируемого взаимодействия системы с окружением (резервуаром), естественно существующим вокруг нее. В случае диссипативных систем ситуация, как правило, именно такова. В разделе 4 показано, что эволюцию очень широкого класса открытых систем можно корректно рассматривать как результат их непрерывного измерения. Поэтому подход, основанный на ограниченных интегралах по путям, позволяет построить общую теорию диссипации.

В важном частном случае, когда непрерывное измерение представляет собой мониторинг некоторой наблюдаемой или нескольких наблюдаемых системы, описание процесса ограниченными интегралами по путям эквивалентно уравнению Шрёдингера с комплексным гамильтонианом. Например, если система подвергается непрерывному мониторингу наблюдаемой  $\hat{A}$ , который дает результат  $a(t)$ , то она эволюционирует в соответствии с уравнением

$$|\dot{\psi}\rangle = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{[a]} |\psi\rangle, \quad (7)$$

где

$$\hat{H}_{[a]} = \hat{H} + \lambda a(t) \hat{B} - i\hbar \kappa (\hat{A} - a(t))^2 \quad (8)$$

— эффективный гамильтониан, содержащий члены (в том числе антиэрмитов член), зависящие от результата измерения  $a(t)$ . Уравнения такого типа могут описывать диссипацию (см. раздел 3).

Подход, основанный на ограниченных интегралах по путям или комплексных гамильтонианах, имеет важное преимущество: в нем отсутствуют осложнения, связанные с рассмотрением (и последующим исключением из рассмотрения — редуцированием) огромного числа степеней свободы резервуара. Вместо этого влияние резервуара учитывается неявным образом. Все существенные для этого характеристики резервуара содержатся в описании того, какие наблюдаемые и в каком режиме

подвергаются измерению, т.е. какая информация о системе "записывается" в резервуаре (кодируется в состоянии резервуара, возникающем в процессе взаимодействия). Например, в приведенном примере в резервуаре записывается информация о том, что наблюдаемая  $\hat{A}$  с течением времени меняется по закону  $a(t)$ . Точность, с которой это справедливо, зависит от константы  $\kappa$ .

Вторым важным отличием подхода, в котором используются ограниченные интегралы по путям, является то, что возникающее в результате его применения уравнение для матрицы плотности всегда оказывается уравнением типа уравнения Линдблада (5), т.е. положительность матрицы плотности гарантируется. Такой подход применим даже в том случае, если не предполагается марковский характер процесса [3, 44], хотя в этом случае нельзя перейти от ограниченных интегралов по путям к уравнениям, "локальным во времени".

Еще одно преимущество рассмотрения диссипации в рамках теории непрерывных измерений состоит в том, что при этом процесс представляется селективным образом, хотя при желании можно перейти и к неселективному описанию того же процесса. Это означает, что такая теория позволяет иметь дело не только со статистической смесью всех возможных эволюций диссипативной системы (что представляется матрицей плотности), но и с каждой из индивидуальных эволюций по отдельности (последняя представляется волновой функцией, являющейся решением уравнения Шрёдингера с комплексным гамильтонианом).

Так, в случае мониторинга наблюдаемой  $\hat{A}$  (в режиме, который рассмотрен выше) процесс описывается селективным образом при помощи уравнения (7). Такое описание зависит от результата измерения:  $[a] = \{a(t)\}$ . Неселективное описание того же самого процесса получается после перехода от вектора состояния  $|\psi\rangle = |\psi_{[a]}\rangle$  к "парциальной" матрице плотности  $\rho_{[a]} = |\psi_{[a]}\rangle\langle\psi_{[a]}|$  и затем к полной матрице плотности, которая получается суммированием по всем возможным результатам измерения:  $\rho = \int d[a] \rho_{[a]}$ . Оказывается, что полная матрица плотности удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] - \frac{\kappa}{2} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{\rho}]] - \frac{\lambda^2}{8\kappa\hbar^2} [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{\rho}]] - \\ & - \frac{i\lambda}{2\hbar} [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{\rho}]_+], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $[\ , ]_+$  означает антикоммутатор. Это уравнение автоматически принадлежит к классу уравнений Линдблада (5) и описывает диссипативную систему, причем параметр  $\lambda$  пропорционален коэффициенту трения.

Кроме ограниченных интегралов по путям, предлагались и другие селективные подходы к описанию непрерывных измерений и к диссипации. Главные из них основаны на стохастических уравнениях и квантовых скачках (их обзор можно найти в [45]). В каждом из них в уравнение Шрёдингера рассматриваемой системы вводится источник шума (в первом случае — белый шум, во втором — случайные квантовые переходы системы), который имитирует влияние измерительной системы (резервуара). Статистика шума подбирается таким образом, чтобы после перехода к неселективному описанию получилось правильное уравнение для мат-

рицы плотности, например уравнение Линдблада (5). Эти методы с успехом применяются для численного расчета реальных систем. Однако их общим недостатком является отсутствие физической интерпретации шума и следующий из этого произвол в построении теории.

Так, различным формам стохастических уравнений для вектора состояния соответствует одно и то же уравнение для матрицы плотности, а предлагаемые критерии для выбора одной из форм часто являются чисто математическими и недостаточно обоснованы. В отличие от этого в подходе, основанном на ограниченных интегралах по путям, одна из всех возможных альтернативных эволюций измеряемой системы задается функцией, имеющей ясный физический смысл — она характеризует результат измерения (как функция  $a(t)$  в рассмотренном примере). В связи с этим следует заметить, что одна из форм стохастических уравнений эквивалентна [3, 46, 47] уравнению Шрёдингера с комплексным гамильтонианом, возникающему в теории ограниченных интегралов по путям. Поскольку метод ограниченных интегралов по путям физически полностью обоснован (см. разделы 3 и 4), эквивалентное ему стохастическое уравнение дает правильное селективное описание эволюции измеряемой системы. Неэквивалентные стохастические уравнения могут описывать эволюцию (зависимость вектора состояния от времени) неверно даже в том случае, если после суммирования по альтернативным эволюциям они приводят к правильному уравнению для матрицы плотности.

Может возникнуть вопрос: любая ли диссипация сводится к непрерывному измерению квантовой системы ее окружением? Поскольку диссипация всегда вызывается влиянием на систему со стороны ее окружения, этот вопрос можно переформулировать следующим образом: всякая ли открытая квантовая система может рассматриваться как измеряемая своим окружением? В разделе 4 показано, что это справедливо в случае, если окружение (резервуар) содержит достаточно большое число степеней свободы. Поскольку такое условие практически всегда выполняется, подход, основанный на теории непрерывных измерений, является общим.

## 2. Модели резервуара

Рассмотрим кратко, как строятся модели, позволяющие рассчитать поведение диссипативной системы, и обсудим некоторые выводы, которые можно сделать на основе таких моделей. В качестве типичного примера мы используем известную модель Калдейры–Леггета, хотя ряд других моделей дают сходные результаты.

### 2.1. Модель Калдейры–Леггета

Модель Калдейры–Леггета [1, 2] разработана для того, чтобы описать диффузию квантовой частицы через вещество, т.е. построить квантовый аналог процесса, описываемого классическими уравнениями (1), (2). Модель является одномерной. В ней предполагается, что пробная (броуновская) частица движется в среде, состоящей из большого числа точечных "атомов", взаимодействующих друг с другом. Именно совокупность атомов среды составляет резервуар, приводящий к диссипации пробной частицы. Предполагается, что потенциал, описывающий эту совокупность атомов

(резервуар), имеет абсолютный минимум, соответствующий положению равновесия всех атомов, атомы совершают лишь небольшие колебания относительно положений равновесия, а их взаимодействие с пробной частицей малое. Можно считать, что пробная частица движется сквозь одномерный кристалл.

В предположении, что отклонения от положения равновесия невелики, потенциал, описывающий атомы, можно считать квадратичным по их координатам, т.е. представлять совокупность атомов как набор взаимодействующих друг с другом гармонических осцилляторов. Переопределяя координаты семейства осцилляторов (переходя к нормальным модам), можно заменить их семейством невзаимодействующих осцилляторов. Эта процедура типична для описания кристалла и сводит его динамику к динамике изолированных гармонических осцилляторов. В конце концов полный гамильтониан пробной частицы и резервуара представляется в виде

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + V(\hat{q}) + \hat{q} \sum_n c_n \hat{u}_n + \sum_n \left( \frac{\hat{v}_n^2}{2m_n} + \frac{1}{2} m_n \omega_n^2 \hat{u}_n^2 \right), \quad (10)$$

где  $\hat{q}$ ,  $\hat{p}$  — координата и импульс частицы массой  $m$ , находящейся под воздействием потенциала  $V(\hat{q})$ , а  $\hat{u}_n$ ,  $\hat{v}_n$  — координата и импульс  $n$ -го осциллятора резервуара ( $n$ -й нормальной моды системы атомов), имеющего массу  $m_n$  и частоту  $\omega_n$ .

Мы не будем детально проследивать дальнейшие этапы построения модели, а ограничимся изложением общей схемы этого построения.

Воздействие резервуара на пробную частицу (при условии, что результирующее состояние самого резервуара нас не интересует) описывается так называемым функционалом влияния Фейнмана–Вернона [43, 48]. Функционал влияния возникает, если записать матрицу плотности системы (пробная частица + резервуар) с помощью (двойного) фейнмановского интеграла по путям, а затем проинтегрировать по конечным состояниям резервуара, перейдя к редуцированной матрице плотности частицы. В результате матрица плотности пробной частицы выражается как двойной интеграл по путям лишь самой частицы, но с некоторым функционалом в подынтегральном выражении. Этот функционал описывает влияние резервуара и называется функционалом влияния.

Мы будем иметь дело с функционалом влияния в разделе 4 и тогда определим его более точно. Сейчас же скажем лишь, что функционал влияния коллектива невзаимодействующих осцилляторов может быть вычислен точно, потому что фигурирующие в нем интегралы по путям являются интегралами гауссова типа. Это вычисление было выполнено в работах Фейнмана и Вернона [43, 48]. Предположения, принятые в модели Калдейры–Леггета, позволяют воспользоваться этими результатами.

Существенно отметить, что семейство осцилляторов, составляющих резервуар, принимается бесконечным и даже непрерывным. Формально это достигается тем, что число осцилляторов в конечном семействе стремится к бесконечности. Однако такой предельный переход является важным шагом, приводящим к новому качеству — необратимости. Проще всего это выразить на языке измерения. В результате взаимодействия частицы

с резервуаром состояние последнего меняется, и в этом изменении определенным образом кодируется информация о состоянии частицы. Если выразиться точнее, происходит запутывание (entanglement) состояний частицы и резервуара (см. [3, 4, 33]).

Если резервуар (в данном случае система осцилляторов) конечен, то с течением времени его состояние может вернуться к первоначальному. Тогда информация о частице, которая хранилась в резервуаре, уйдет из него и вернется к частице (исчезнет запутывание частицы с резервуаром). В результате состояние всей системы в принципе может вернуться к исходному, а весь процесс оказывается обратимым. Конечно, при очень большом числе степеней свободы резервуара это может произойти лишь за огромное время, т.е. с практической точки зрения процесс необратим. Формальный переход к пределу бесконечного числа степеней свободы делает время возврата бесконечным, т.е. позволяет описать процесс как необратимый в абсолютном смысле слова.

В разделе 4.2.2 мы столкнемся с этим важным предположением в другом (но по существу близком) контексте и в другом формализме. Мы увидим, что различные альтернативные пути эволюции открытой системы декогерируют (т.е. между ними не возникает интерференции), если влияющее на эту систему окружение содержит большое (макроскопическое или хотя бы мезоскопическое) число степеней свободы.

После того как матрица плотности частицы выражена через функционал влияния, который в свою очередь берется из работы Фейнмана–Вернона, закон эволюции частицы в модели Калдейры–Леггета в принципе известен. Остается, однако, важная задача интерпретации полученного результата в терминах, которые имеют ясный физический смысл. Для этого производится переход к классическому пределу, после чего этот предел сравнивается с имеющейся классической теорией, т.е. с уравнениями (1), (2). Классический предел предполагает, в частности, достаточно высокую температуру ( $kT \gg \hbar\omega_k$  для всех характерных частот резервуара  $\omega_k$ ) и время, превышающее время релаксации резервуара.

Анализ полученных в классическом пределе выражений позволяет отождествить их с теми, что фигурируют в классической теории. В частности, выводится корреляционная функция, которую можно отождествить с выражением (2). Это позволяет в конце концов выразить параметры квантовой модели через параметры, фигурирующие в классической теории броуновского движения: температуру  $T$  и коэффициент трения  $\gamma$ . После этого уравнение для матрицы плотности квантовой броуновской частицы принимает вид [1, 2]

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_R, \hat{\rho}] - \frac{D}{\hbar^2} [\hat{q}, [\hat{q}, \hat{\rho}]] - \frac{i\gamma}{\hbar} [\hat{q}, [\hat{p}, \hat{\rho}]_+], \quad (11)$$

где через  $[\ , \ ]_+$  обозначен антикоммутатор,  $\hat{H}_R$  — гамильтониан частицы, "перенормированный" в результате взаимодействия с резервуаром (см. разделы 3.3 и 3.4),  $\gamma$  — коэффициент трения и  $D = 2m\gamma kT$  — коэффициент диффузии. Уравнение (11) выведено в предположении не слишком малых температур (тепловая энергия  $kT$  больше, чем энергия квантов, соответствующих характерным частотам частицы  $\hbar\omega$ ). Близкое уравнение было ранее получено в работе [11] совершенно другим методом. Аналогичные уравнения с помощью различных моделей резервуара выводились также в работах [27–29].

В качестве приложений в работе Калдейры и Леггета рассматриваются случаи, когда диффундирующая частица движется в нулевом ( $V(q) = 0$ ) или квадратичном ( $V(q) = m\omega^2 q^2/2$ ) потенциале, т.е. является свободной частицей или гармоническим осциллятором. При этом снимается ограничение на температуру, так что она может быть сколь угодно малой. Выводятся формулы, описывающие, как с течением времени меняется центр волнового пакета и его ширина. В частности, показывается, что при малом трении ( $\gamma \rightarrow 0$ ) асимптотически (при  $t \rightarrow \infty$ ) дисперсия координаты и коэффициент диффузии демпфированного осциллятора равны

$$\sigma^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT}, \quad D = m\gamma\hbar\omega \coth \frac{\hbar\omega}{2kT}. \quad (12)$$

При  $T \rightarrow \infty$  коэффициент диффузии принимает классическое значение  $D = 2m\gamma kT$ , а при  $T \rightarrow 0$  он равен  $D = 2m\gamma\hbar\omega/2$ .

## 2.2. Диссипация и декогеренция

Проведем дополнительный анализ [50, 33] уравнения для матрицы плотности (11), полученного в модели Калдейры–Леггета. Цель анализа состоит в том, чтобы показать, что описываемый этим уравнением процесс ведет не только к диссипации, но и к другому важному физическому явлению — декогеренции<sup>6</sup>. Это явление составляет самую суть процесса измерения квантовой системы [4, 3, 33], так что диссипация квантовой системы неразрывно связана с ее измерением.

Запишем уравнение (11) в координатном представлении и сохраним справа лишь  $D$ -член, который является доминирующим в "классическом" режиме, когда эффективное действие становится много больше, чем  $\hbar$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(q, q') = \dots - \frac{D}{\hbar^2} (q - q')^2 \rho(q, q'). \quad (13)$$

Значит, при больших (но не слишком больших, см. ниже) временах решение уравнения (11) будет содержать множитель

$$\exp \left[ -\frac{D}{\hbar^2} (q - q')^2 t \right]. \quad (14)$$

Отсюда видно, что с течением времени недиагональные по координате матричные элементы матрицы плотности экспоненциально быстро вымирают. Это и есть явление декогеренции. С появлением декогеренции по координате разные значения координаты характеризуются лишь положительными вероятностями, но не комплексными амплитудами вероятности (см., например, [4, 3, 33]).

Вероятности, в отличие от амплитуд вероятности, характерны для классической теории, и возникновение декогеренции по координате означает, что координата приобретает классические свойства. Наблюдаемой координаты можно после этого приписать то или иное определенное значение, в соответствии с распределением вероятностей по различным значениям. Это означает, что произошло измерение координаты. Из формулы (14) видно, что с течением времени декогеренция

координаты возникает на все меньших и меньших масштабах, т.е. измерение координаты происходит со все большей и большей точностью.

Сказанное означает, что квантовая диффузия, описываемая уравнением (11), представляет собой в то же время процесс измерения координаты: информация о координате записывается в резервуаре. Это одна из иллюстраций того, что явления диссипации и непрерывного измерения квантовой системы тесно связаны друг с другом. Мы обсудим это подробнее в разделе 4.

Можно показать [33, гл. 3], что экспоненциальный режим декогерентизации, описываемый формулой (14), в конце концов прекращается и длина когерентности стабилизируется на некотором постоянном уровне  $\ell$  порядка термической длины волны де Бройля  $\lambda_{\text{th}}$ :

$$\ell = \hbar \sqrt{\frac{\gamma}{2D}} = \frac{\lambda_{\text{th}}}{\sqrt{8\pi}}, \quad \lambda_{\text{th}} = \hbar \sqrt{\frac{2\pi}{mkT}}. \quad (15)$$

Время, за которое длина когерентности достигает некоторой наперед заданной величины  $\Delta a$ , т.е. время, за которое измерение позволяет различить положения частицы, отличающиеся на  $\Delta a$  (время декогеренции), следует из вида экспоненты (14):

$$\tau_{\text{decoh}}(\Delta a) = \frac{\hbar^2}{D(\Delta a)^2}. \quad (16)$$

Релаксационные эффекты, связанные с трением, т.е. с диссипацией, характеризуются временем, обратным коэффициенту трения:

$$\tau_{\text{frict}} = \frac{1}{\gamma}. \quad (17)$$

Темпы декогеренции и релаксации, связанной с трением, относятся, следовательно, как

$$\frac{\text{темп декогеренции}}{\text{темп релаксации}} = \frac{\tau_{\text{frict}}}{\tau_{\text{decoh}}(\Delta a)} = \frac{mkT(\Delta a)^2}{\hbar^2} \sim \left( \frac{\Delta a}{\lambda_{\text{th}}} \right)^2. \quad (18)$$

Отношение (18) становится равным единице (время декогеренции сравнивается с временем релаксации), если потребовать максимальной декогеренции, т.е. положить  $\Delta a = \lambda_{\text{th}}$ . Однако если иметь в виду декогеренцию макроскопических масштабов, то это отношение очень велико, т.е. декогеренция происходит гораздо быстрее, чем сказывается релаксация. Для типичной макроскопической ситуации ( $m = 1$  г,  $T = 300$  К,  $\Delta a = 1$  см) отношение (18) имеет порядок  $10^{40}$ . В этом случае декогеренция (переход к классическому режиму) наступает гораздо раньше, чем сказывается трение, и последнее может быть корректно учтено в рамках классической теории [2, 51, 33].

В определенных условиях возникает такая ситуация, когда отношение (18) невелико, декогеренция является сравнительно медленной и квантовые свойства процесса должны быть учтены полностью. Обычно это имеет место в мезоскопических системах.

Так, методами квантовой оптики может быть приготовлено [28, 52–55] состояние нескольких фотонов, представляющее собой суперпозицию двух резко различающихся конфигураций поля. После приготовления такая суперпозиция достаточно медленно подвергается

<sup>6</sup> Это верно и для уравнений, которые получаются с помощью других моделей, используемых в теории диссипации.

декогерентизации, превращаясь в смесь тех же двух конфигураций. При этом отношение типа<sup>7</sup> (18) имеет порядок квадрата числа фотонов и обе составляющие процесса — диссипация и декогеренция — существенны. Такого рода состояния иллюстрируют специфические черты квантовых измерений, поэтому их часто называют "шрёдингеровскими котами". В то же время это вполне реализуемые состояния, которые можно исследовать экспериментально.

### 2.3. Декогеренция внутренней структуры атомов

В модели Калдейры – Леггета декогеренция броуновской частицы происходит за счет влияния взаимодействующих с ней атомов, которые предполагаются точечными (не имеют внутренней структуры, но взаимодействуют друг с другом). Частица возбуждает движение атомов, а в результате обратного влияния этих возбуждений на частицу происходит ее декогеренция (частичная потеря квантовых свойств) и диссипация. Если не пренебрегать внутренней структурой атомов, то взаимодействие с частицей будет возбуждать их внутренние движения. При определенных условиях этот эффект может быть доминирующим.

В работе [56] (см. также [3, раздел 4.3]) рассмотрена модель, напоминающая модель Калдейры – Леггета, но отличающаяся тем, что атомы среды (резервуара), через которую движется пробная частица, предполагаются неподвижными (т.е. они достаточно тяжелы, так что сдвигаются пренебрежимо мало), однако имеющими внутреннюю структуру. При таких предположениях возмущение среды, вызываемое движением частицы, проявляется не в движении атомов (относительно положений равновесия), как в модели Калдейры – Леггета, а в возбуждении их внутренних степеней свободы. Из такой модели было выведено уравнение для матрицы плотности частицы, имеющее вид

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] - \frac{\varkappa}{2} [\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}}, \hat{\rho}], \quad (19)$$

где  $\hat{\mathbf{r}}$  — оператор (трехмерного) положения пробной частицы, а коэффициент  $\varkappa = 2/l^2\tau$  выражается через радиус  $l$  и время  $\tau$  взаимодействия между частицей и атомами резервуара. Это уравнение выведено в работе [56] двумя альтернативными методами: во-первых, в рамках описанной выше модели, а во-вторых, с помощью теории непрерывных измерений (ограниченных интегралов по путям). Второй подход мы подробнее рассмотрим в разделе 3.

Переписывая уравнение (19) в координатном представлении и сохраняя лишь "классический член", получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \dots - \frac{\varkappa}{2} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (20)$$

Значит, при больших временах решение уравнения (19) будет содержать множитель

$$\exp \left[ -\frac{\varkappa}{2} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 t \right]. \quad (21)$$

<sup>7</sup> Вместо  $\Delta a$  в этом случае должен фигурировать параметр, характеризующий различие двух конфигураций (например, разность фаз двух электромагнитных волн), а вместо  $\lambda_{\text{th}}$  — предельное значение этого параметра с учетом диссипации.

Такая асимптотика по времени означает, что уравнение (19) описывает эволюцию системы (квантовой броуновской частицы), которая подвергается измерению наблюдаемой  $\hat{\mathbf{r}}$ , т.е. координат частицы в трехмерном пространстве.

В работе [56] это было целью — построить модель непрерывного измерения координаты. Принятая для этого модель измерения является простейшей (описывает "минимально-возмущающее" измерение координат частицы). Поэтому она приводит к декогеренции (постепенной потере квантовых свойств в отношении измеряемой величины), но не к диссипации. Вспоминая то, что было выяснено в разделе 2.2, можно заключить, что такая модель применима в случае, если декогеренция возникает очень медленно, и лишь на ранних стадиях декогерентизации, когда диссипация еще не сказывается. В разделе 3 мы рассмотрим (в рамках модельно-независимого подхода) более сложный режим "неминимально-возмущающего" непрерывного измерения, в котором возникают оба явления: декогеренция и диссипация.

От рассмотрения моделей диссипации теперь мы перейдем к квантовой теории непрерывных измерений, которая позволяет построить теорию диссипации квантовых систем, не опирающуюся на конкретную модель и вообще не зависящую от моделей.

## 3. Диссипация — из теории непрерывных измерений

Влияние резервуара на взаимодействующую с ним квантовую систему можно учесть в рамках квантовой теории непрерывных измерений. Мы рассмотрим теорию измерений, основанную на ограниченных интегралах по путям. Вывод уравнений для диссипативной квантовой системы из теории измерений производится в соответствии с работой [5]. В разделе 4 показано, что такой подход к теории диссипации является общим.

### 3.1. Измерение и ограниченные интегралы по путям

Рассмотрим метод ограниченных интегралов по путям, предложенный автором по идее Фейнмана [40], для описания непрерывных квантовых измерений [57, 58, 41, 42, 3–5] (см. также [59–61, 47]). В этом подходе открытая непрерывно измеряемая система описывается (в отличие от замкнутой) не одним унитарным оператором эволюции, а целым семейством парциальных операторов эволюции (пропагаторов), в соответствии с множеством альтернативных результатов измерения<sup>8</sup>. Каждый результат измерения определяет один канал квантовой эволюции при помощи соответствующего парциального пропагатора. Лишь все эти каналы (т.е. все пропагаторы) вместе дают полное описание динамики открытой непрерывно измеряемой системы.

Исходным пунктом для построения метода ограниченных интегралов по путям является фейнмановская версия квантовой механики, в которой используется формализм интегралов по путям. В фейнмановской

<sup>8</sup> Различные результаты измерения на самом деле соответствуют различным состояниям, в которые может перейти окружение системы (резервуар) в результате взаимодействия с ней. Однако в подходе, основанном на ограниченных интегралах по путям, резервуар не рассматривается явно, а результаты измерения описываются в терминах, характерных для самой системы.



формулировке квантовой механики амплитуда перехода системы из одной точки конфигурационного пространства в другую (пропагатор системы) представляется в виде интеграла по путям:

$$U_t(q'', q') = \int_{q'}^{q''} d[q] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S[q] \right] = \int_{q'}^{q''} d[p] d[q] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt (p\dot{q} - H(p, q, t)) \right]. \quad (22)$$

Здесь  $S[q]$  — классическое действие рассматриваемой системы, которое можно выразить как интеграл вдоль данного пути от лагранжиана:

$$S[q] = \int_0^t dt L(q, \dot{q}, t), \quad (23)$$

а  $H$  — ее гамильтониан. Первый из интегралов в (22) — это интеграл по путям в конфигурационном пространстве, а второй — интеграл по путям в соответствующем фазовом пространстве. Оба интеграла берутся по путям из точки  $q'$  в момент  $t = 0$  в точку  $q''$  в момент  $t$ . Координаты и соответствующие импульсы могут быть многомерными.

Оператор  $U_t$  с ядром (22), т.е. имеющий матричные элементы

$$\langle q'' | U_t | q' \rangle = U_t(q'', q'), \quad (24)$$

является оператором эволюции, т.е. описывает эволюцию системы в терминах ее вектора состояния или матрицы плотности как

$$|\psi_t\rangle = U_t |\psi_0\rangle, \quad \rho_t = U_t \rho_0 U_t^\dagger. \quad (25)$$

Как известно, вместо вычисления интеграла по путям (22) вектор  $|\psi_t\rangle$  можно найти, решив уравнение Шрёдингера

$$i\dot{|\psi_t\rangle} = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} |\psi_t\rangle \quad (26)$$

с начальным условием  $|\psi_0\rangle$ . Классический гамильтониан системы  $H$  является вещественным, соответствующий квантовый оператор  $\hat{H}$  — эрмитовым. Поэтому оператор эволюции  $U_t$  унитарен:

$$U_t^\dagger U_t = 1, \quad (27)$$

а вектор  $|\psi_t\rangle$  имеет единичную норму (если начальный вектор  $|\psi_0\rangle$  нормирован на единицу).

Теперь мы должны перейти от фейнмановского интеграла по путям (22) к ограниченному интегралу по путям. Для этого следует вспомнить рассуждение Фейнмана, которое привело его к идее интеграла по путям. Это рассуждение заключается в том, что экспонента, стоящая под знаком интеграла по путям и зависящая от некоторого конкретного пути, интерпретируется как амплитуда вероятности того, что система распространяется именно вдоль этого пути. Согласно обычным правилам квантовой механики полная амплитуда вероятности распространения представляется как сумма (точнее, интеграл) амплитуд, соответствующих всем возможным путям, ведущим из точки  $q'$  в точку  $q''$ . Это и дает фейнмановский интеграл (22).

Однако этим рассуждением интегрирование по всем путям (с заданными граничными точками), как в выражении (22), оправдано лишь для замкнутой системы, когда принципиально невозможно выяснить, вдоль какого пути распространяется система. Ситуация меняется, если система открыта, т.е. как-то взаимодействует со своим окружением. В этом случае состояние окружения под влиянием взаимодействия меняется, причем изменение зависит от состояния системы. Это означает, что происходит непрерывное измерение системы. Оно дает частичную информацию о том, вдоль какого пути распространялась система. В этом случае интеграл по путям следует ограничить теми путями, которые совместимы с полученной информацией.

Так возникает ограниченный интеграл по путям. Идея его применения к непрерывным измерениям была кратко сформулирована Фейнманом в его оригинальной работе [40]. Этот подход был развит технически и концептуально в работах автора [57, 58, 41, 42, 4, 3] (см. также [59–62]). Изложим кратко некоторые его пункты.

Обозначим результат непрерывного измерения через  $\alpha$ . Предположим, что система подвергается непрерывному измерению, которое дало такой результат. Тогда ее эволюция описывается вместо (22) пропагатором

$$U_t^\alpha(q'', q') = \int_{q'}^{q''} d[p] d[q] w_\alpha[p, q] \times \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt (p\dot{q} - H(p, q, t)) \right], \quad (28)$$

где  $w_\alpha[p, q]$  — функционал, зависящий от пути  $w[p, q]$  в фазовом пространстве и описывающий информацию о путях, которую дает результат измерения  $\alpha$ . Последнее означает, что этот функционал по модулю близок к единице для тех путей, которые соответствуют результату измерения  $\alpha$ , и близок к нулю для путей, не соответствующих ему.

Для наглядности рассмотрим в качестве примера измерение, которое можно назвать мониторингом координаты  $q$ . Предположим, что измерение производится с разрешением  $\Delta a$ , а результат измерения описывается кривой  $[a] = \{a(t)\}$  (которая играет роль  $\alpha$ ). Тогда этому результату соответствуют пути  $[q]$  в конфигурационном пространстве, лежащие в некотором коридоре. В центре такого коридора лежит кривая  $a(t)$ , а ширина его равна  $2\Delta a$ . Пути в фазовом пространстве  $[p, q] = [p][q]$ , соответствующие данному результату измерения, характеризуются точно так же: путь  $[p]$  произволен, а путь  $[q]$  лежит в указанном коридоре. Функционал  $w_{[a]}[p, q]$ , представляющий такой результат измерения, равен единице для путей, лежащих в коридоре, и нулю для всех остальных путей. Ниже мы рассмотрим более общий случай мониторинга произвольной наблюдаемой и в более реалистическом гауссовом приближении.

В общем случае функционал  $w_\alpha[p, q]$  может принимать комплексные значения, а его абсолютная величина лежит между нулем и единицей. Информация, которую дает результат измерения  $\alpha$ , лучше всего характеризуется как раз функционалом  $w_\alpha[p, q]$ . Точнее, абсолютная величина комплексного числа  $w_\alpha[p, q]$  характеризует полученную при измерении информацию, а его аргумент — обратное влияние измерения на измеряемую систему. Если этот аргумент равен нулю, т.е. функцио-

нал является вещественным положительным, то измерение возмущает состояние измеряемой системы минимальным образом (получить информацию, совсем не возмущая состояние системы, невозможно). Если аргумент отличен от нуля, т.е. функционал комплексный, измерение является *неминимально-возмущающим* (об этом подробнее см. в разделе 3.3 и в книге [3]).

Эволюция измеряемой системы, представленная пропагатором (28), зависит, таким образом, от того, какой результат  $\alpha$  дало измерение, т.е. от того, в каком состоянии оказалось ее окружение. Поскольку результаты измерения могут быть различными, полностью поведение измеряемой системы характеризуется лишь совокупностью пропагаторов (28) при всех возможных  $\alpha$ . Поэтому каждый из этих пропагаторов называется парциальным.

Если построить оператор эволюции  $U_\alpha$  как интегральный оператор с ядром (28), то эволюция измеряемой системы описывается уравнениями

$$|\psi_\alpha\rangle = U_\alpha |\psi_{\text{in}}\rangle, \quad \rho_\alpha = U_\alpha \rho_{\text{in}} U_\alpha^\dagger \quad (29)$$

и зависит, таким образом, от результата измерения  $\alpha$ . Если результат измерения неизвестен, то эволюцию следует описывать полной матрицей плотности, которая получается интегрированием по всем возможным альтернативным результатам измерения (т.е. селективное описание):

$$\rho = \int d\alpha \rho_\alpha = \int d\alpha U_\alpha \rho_{\text{in}} U_\alpha^\dagger. \quad (30)$$

Следует заметить, что описание открытой системы вектором состояния является идеализацией. Действительно, если различные альтернативы образуют непрерывное множество, то единственная альтернатива  $\alpha$  образует подмножество меры нуль и никогда не реализуется на практике. Например, при измерении любой реальной измерительный прибор дает показания, которые позволяют выделить лишь некоторый интервал  $\mathcal{A}$  альтернатив  $\alpha$ , более или менее узкий в зависимости от совершенства прибора. Если информация о результате измерения ограничивается лишь тем, что задан интервал  $\mathcal{A}$ , то эволюция системы с учетом этой информации описывается матрицей плотности

$$\rho_{\mathcal{A}} = \int_{\mathcal{A}} d\alpha \rho_\alpha = \int_{\mathcal{A}} d\alpha U_\alpha \rho_{\text{in}} U_\alpha^\dagger. \quad (31)$$

Важно понимать, что ширина интервала  $\mathcal{A}$  характеризует чисто классическую погрешность прибора, которая не имеет ничего общего с его квантовым разрешением, описываемым шириной коридора, по которому берется ограниченный интеграл по путям (т.е. тем, как устроены функционалы  $w_\alpha$ ). Поясним это различие следующим образом. Прибор, чувствительный квантовый элемент которого в принципе позволяет произвести измерение с чрезвычайно высоким разрешением, может иметь плохую систему регистрации, которая на выходе выдает показания, позволяющие оценить измеряемую величину гораздо хуже, чем могло бы быть. Тогда следует использовать частично неселективное описание (31). Более того, система регистрации может вообще отсутствовать. Тогда эволюцию измеряемой системы следует описывать полной матрицей плотности (30) — возникает неселективное описание измерения.

Именно это имеет место в том случае, если измерение квантовой системы происходит спонтанно, в результате ее взаимодействия с резервуаром, а не организовано намеренно с целью получения информации о ней.

Строго говоря, любое реальное измерение следует описывать матрицами плотности типа (31), т.е. описание должно быть частично неселективным. Однако при определенных условиях селективное описание (29) может быть хорошим приближением (детали см. в [3]).

### 3.2. Мониторинг наблюдаемой

Выражение (28) — это наиболее общая форма ограниченного интеграла по путям, описывающая непрерывное измерение самого общего вида. Рассмотрим теперь частный случай, когда измерение состоит в слежении за наблюдаемой  $\hat{A} = A(\hat{p}, \hat{q})$  (мониторинге наблюдаемой). Предположим, что мониторинг дает результат, выражающийся функцией  $a(t)$ , т.е. в результате измерения значение наблюдаемой  $A$  в момент времени  $t$  оценивается как  $a(t)$ . Тогда ограниченный интеграл по путям должен браться по коридору путей  $[p(t), q(t)]$ , таких, что для пути, лежащего в центре этого коридора,  $A(t) = A(p(t), q(t)) = a(t)$ . Ширина коридора зависит от того, с каким разрешением производится измерение.

Точное определение ограниченного интеграла по путям состоит в выборе весового функционала  $w_{[a]}[p, q]$ , зависящего от  $[a] = \{a(t') | 0 \leq t' \leq t\}$  как результата измерения. Математически простейший выбор, оправданный также и с физической точки зрения (см. сноску 9), — это гауссов функционал

$$w_{[a]}[p, q] = \exp \left\{ \int_0^t dt [-\kappa (A(p, q) - a(t))^2] \right\}. \quad (32)$$

Такой функционал тем меньше, чем дальше (в смысле среднего квадратичного) кривая  $A(t) = A(p(t), q(t))$  от кривой  $a(t)$ . Функционал является положительно определенным и, следовательно, описывает *минимально-возмущающее* непрерывное измерение, являющееся аналогом фон-неймановского мгновенного измерения, представляемого проектором. Такой функционал лишь подавляет в интеграле по путям те пути, которые не соответствуют информации, даваемой измерением. Коэффициент  $\kappa$  фиксирует разрешение, с которым производится измерение: оно тем точнее, чем больше этот коэффициент.

Подстановка функционала (32) в интеграл по путям в выражении для парциального пропагатора (28) приводит этот интеграл к виду, фактически совпадающему с обычным (неограниченным) фейнмановским интегралом (22), в котором, однако, вместо исходного гамильтониана  $H(p, q)$  фигурирует эффективный гамильтониан

$$H_{[a]}(p, q) = H(p, q) - i\hbar\kappa (A(p, q) - a(t))^2, \quad (33)$$

имеющий мнимую составляющую, зависящую от результата измерения  $[a]$ . Поскольку вектор состояния, возникающий под действием обычного (фейнмановского) пропагатора, удовлетворяет уравнению Шрёдингера, в нашем случае происходит то же самое, однако с эффективным гамильтонианом. Именно, вектор состояния

$$|\psi_t^{[a]}\rangle = U_t^{[a]} |\psi_0\rangle \quad (34)$$

удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$|\dot{\psi}\rangle = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{[a]} |\psi\rangle = \left[ -\frac{i}{\hbar} \hat{H} - \kappa (\hat{A} - a(t))^2 \right] |\psi\rangle \quad (35)$$

с эффективным гамильтонианом

$$\hat{H}_{[a]} = \hat{H} - i\hbar\kappa(\hat{A} - a(t))^2. \quad (36)$$

Возникающее таким образом описание эволюции измеряемой системы является селективным, т.е. зависит от результата измерения  $[a]$ . Чтобы перейти к неселективному описанию, следует сначала от вектора состояния перейти к эквивалентной матрице плотности

$$\rho_t^{[a]} = |\psi_t^{[a]}\rangle\langle\psi_t^{[a]}|. \quad (37)$$

Описание измеряемой системы такой матрицей плотности по-прежнему является селективным. Однако теперь мы можем проинтегрировать по всем возможным альтернативным результатам измерения и получить полную матрицу плотности

$$\rho_t = \int d[a] |\psi_t^{[a]}\rangle\langle\psi_t^{[a]}|, \quad (38)$$

которая уже не зависит от результата измерения (т.е. учитывает все возможные альтернативные результаты измерения). Тем самым мы имеем неселективное описание эволюции измеряемой системы.

Можно показать [3, 63], что полученная таким образом полная матрица плотности удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] - \frac{\kappa}{2} [\hat{A}[\hat{A}, \hat{\rho}]]. \quad (39)$$

Это уравнение является уравнением типа уравнения Линдблада (5). В разделе 2.3 уже рассматривалось уравнение такого типа и показано, что оно ведет к явлению декогеренции. В данном случае декогеренция состоит в том, что различные значения наблюдаемой  $\hat{A}$  характеризуются вероятностями вместо амплитуд вероятности (т.е. интерференция между ними исчезает, они приобретают классические черты). Неудивительно, что это происходит в данном случае, потому что целью всего построения было описать измерение наблюдаемой  $\hat{A}$ . В следующих разделах мы рассмотрим более общий режим измерения, ведущий не только к декогеренции, но и к диссипации.

В заключение сделаем одно важное замечание. Выше было показано, как при помощи ограниченных интегралов по путям или комплексных гамильтонианов описание непрерывных измерений квантовой системы может быть выведено из фейнмановской формы квантовой механики. Такой способ вывода обладает преимуществом общности и независимости от моделей. Однако он может казаться ненадежным, так как опирается на специфическую версию квантовой механики, предложенную Фейнманом, в том числе на теорию амплитуд вероятности, которая в работах Фейнмана [40, 43] была существенно расширена (см. также [64]).

Возникает вопрос: можно ли подтвердить те же выводы, опираясь лишь на стандартный формализм квантовой механики? Это оказалось возможным. В книге [3, гл. 8] стандартными методами рассмотрена

простая модель непрерывного измерения двухуровневой системы серией кратких слабых взаимодействий и показано, что эволюция системы, подвергающейся такому измерению, корректно описывается при помощи ограниченных интегралов по путям с гауссовым весовым функционалом<sup>9</sup>.

В работе [65] тот же вопрос рассмотрен в общей постановке: найдены условия, при которых взаимодействие открытой системы с окружающей средой (резервуаром) можно рассматривать как измерение этой системы и описывать при помощи ограниченных интегралов по путям. Оказалось, что это возможно при очень общих предположениях, в частности всякий раз, когда окружение (резервуар) содержит большое число степеней свободы. Это показывает, что описание открытых (в том числе диссипативных) систем в рамках теории непрерывных измерений является на самом деле общим. Мы рассмотрим эти аргументы в разделе 4. Теперь же перейдем к более общей модели мониторинга, которая демонстрирует не только декогеренцию, но и диссипацию.

### 3.3. Неминимально-возмущающее измерение

Если в показатель экспоненты гауссова функционала (32) добавить чисто мнимое слагаемое, то подавляться будут те же самые пути, т.е. такой функционал описывает мониторинг той же самой наблюдаемой, производимый с тем же самым разрешением. Однако при наличии мнимого слагаемого возмущение, которому подвергается измеряемая система, больше, чем то, которое необходимо для получения информации<sup>10</sup>. В этом случае мы получаем описание *неминимально-возмущающего* непрерывного измерения [3, 5].

Примем, что мнимое слагаемое линейно зависит от результата измерения:

$$w_{[a]}[p, q] = \exp \left\{ \int_0^t dt \left[ -\kappa (A(p, q) - a(t))^2 - \frac{i}{\hbar} (\lambda a(t) B(p, q) + C(p, q)) \right] \right\}. \quad (40)$$

Это выражение для весового функционала означает, что наблюдаемая  $\hat{A}$  подвергается мониторингу, а операторы  $\hat{B}$  и  $\hat{C}$  определяют неминимальную часть возмущения, которое производит измерение. Как мы увидим далее, оператор  $\hat{C}$  приводит к изменению гамильтониана системы в результате того, что она подвергается измерению. Более детальная интерпретация оператора  $\hat{B}$  дана в частном случае гармонического осциллятора в комментарии после формулы (49).

Если принять весовой функционал ограниченного интеграла по путям в форме (40), то парциальный

<sup>9</sup> По-видимому, гауссов функционал возникает всякий раз, когда непрерывное измерение состоит из большого числа "слабых" измерений (т.е. таких, которые дают очень малую информацию, но зато и очень слабо влияют на измеряемую систему). Если такого рода закономерность действительно является общей (что весьма правдоподобно), то она представляет собой квантовый аналог Центральной Предельной Теоремы теории вероятностей.

<sup>10</sup> В случае мгновенного измерения минимально-возмущающее измерение координаты с разрешением  $\Delta q$  приводит к дополнительной неопределенности импульса, равной  $\Delta p = \hbar/2\Delta q$ , а неминимально-возмущающее измерение может, кроме этого, передавать системе некоторый импульс, зависящий от результата измерения.

пропагатор, описывающий эволюцию измеряемой системы (при условии, что измерение дает результат  $a(t)$ ), записывается при помощи ограниченного интеграла по путям как

$$U_{[a]}(q, q', t) = \int d[p] \int_q^{q'} d[q] \exp \left\{ \int_0^t dt \left[ \frac{i}{\hbar} (p\dot{q} - H(p, q)) - \kappa (A(p, q) - a(t))^2 - \frac{i}{\hbar} (\lambda a(t) B(p, q) + C(p, q)) \right] \right\}. \quad (41)$$

Соответствующий оператор эволюции  $U_{[a]}(t)$  позволяет выразить вектор состояния или матрицу плотности системы в произвольный момент времени при условии данного результата измерения  $a(t)$ :

$$|\psi_{[a]}(t)\rangle = U_{[a]}(t) |\psi(0)\rangle, \quad \hat{\rho}_{[a]}(t) = U_{[a]}(t) \hat{\rho}(0) U_{[a]}^\dagger(t). \quad (42)$$

Полная матрица плотности получается суммированием по всем возможным результатам измерения  $[a]$ , т.е.

$$\hat{\rho}(t) = \int d[a] \hat{\rho}_{[a]}(t).$$

Интеграл по  $[a]$ , фигурирующий в этом выражении, оказывается гауссовым и потому точно вычисляется<sup>11</sup>. Это дает

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) = & \int d[p', q'] \int d[p'', q''] \rho_0(q', q'') \times \\ & \times \exp \left[ \int_0^t dt \left( \frac{i}{\hbar} (p'\dot{q}' - H' - C') - \frac{i}{\hbar} (p''\dot{q}'' - H'' - C'') - \frac{\kappa}{2} (A' - A'')^2 - \frac{\lambda^2}{8\kappa\hbar^2} (B' - B'')^2 + \frac{i\lambda}{2\hbar} (A' + A'')(B'' - B') \right) \right]. \quad (43) \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения  $A' = A(p', q')$ ,  $B'' = B(p'', q'')$  и т.д.

Дифференцируя по времени выражение (43) для матрицы плотности, можно вывести для нее дифференциальное уравнение. При этом следует иметь в виду, что все операторы с одним штрихом должны стоять слева от матрицы плотности  $\hat{\rho}$ , а операторы с двумя штрихами — справа от нее.

Кроме того, мы должны правильно выбрать порядок операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  в том случае, когда они относятся к одному и тому же моменту времени. Физическая интерпретация подсказывает, как следует разрешить эту неопределенность. Поскольку оператор  $\hat{B}$  описывает обратное действие (неминимальное возмущение), вызванное тем, что измеряется оператор  $\hat{A}$ , оператор  $\hat{A}$  должен действовать раньше, чем  $\hat{B}$ . Таким образом мы получаем уравнение для матрицы плотности измеряемой системы в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & -\frac{i}{\hbar} [\hat{H} + \hat{C}, \hat{\rho}] - \frac{\kappa}{2} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{\rho}]] - \\ & - \frac{\lambda^2}{8\kappa\hbar^2} [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{\rho}]] - \frac{i\lambda}{2\hbar} [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{\rho}]_+], \quad (44) \end{aligned}$$

где  $[\cdot, \cdot]_+$  означает антикоммутиатор.

Если переписать уравнение (44) через оператор

$$\hat{L} = \hat{A} - \frac{i\lambda}{2\kappa\hbar} \hat{B} \quad (45)$$

и сопряженный по отношению к нему, оно принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{H} + \hat{C} - \frac{i\kappa\hbar}{4} (\hat{L}^\dagger{}^2 - \hat{L}^2), \hat{\rho} \right] - \\ & - \frac{\kappa}{2} (\hat{L}^\dagger \hat{L} \hat{\rho} - 2\hat{L} \hat{\rho} \hat{L}^\dagger + \hat{\rho} \hat{L}^\dagger \hat{L}). \quad (46) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что это уравнение типа уравнения Линдблада (5), т.е. представляемая им эволюция сохраняет положительность матрицы плотности. Первоначальный гамильтониан измеряемой системы перенормируется за счет процедуры измерения.

### 3.4. Гармонический осциллятор с трением

Рассмотрим теперь частный случай гармонического осциллятора:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{q}^2. \quad (47)$$

Предположим, что мониторингу подвергается оператор импульса, а неминимальное возмущение представляется оператором координаты:

$$\hat{A} = \hat{p}, \quad \hat{B} = \omega \hat{q}. \quad (48)$$

Тогда весовой функционал (40) принимает вид (при  $C(p, q) \equiv 0$ )

$$w_{[a]}[p, q] = \exp \left\{ \int_0^t dt \left[ -\kappa (p - a(t))^2 - \frac{i}{\hbar} (\lambda \omega a(t) q) \right] \right\}. \quad (49)$$

Коэффициент  $\lambda$  оказывается в этом случае безразмерным.

Экспонента от наблюдаемой координаты  $\hat{q}$  (умноженной на чисто мнимый коэффициент) представляет собой оператор смещения наблюдаемой импульса  $\hat{p}$ . Точнее, оператор

$$\exp \left( -\frac{i}{\hbar} \delta p \hat{q} \right) \quad (50)$$

с произвольным коэффициентом  $\delta p$  сдвигает импульс на величину  $\delta p$ . Следовательно, неминимальное возмущение, представленное в уравнении (49) членом, пропорциональным  $\hat{q}$ , состоит в том, что происходит сдвиг импульса, зависящий от значения, которое получено при его измерении.

Другими словами, в данном случае непрерывно измеряется импульс осциллятора и при измерении импульс непрерывно подвергается сдвигу, величина которого зависит от текущего (в данный момент времени) результата измерения. Точнее, импульс сдвигается на величину, пропорциональную его значению (как оно оценивается в результате измерения). Если  $\lambda > 0$ , то положительный импульс получает отрицательное приращение, а отрицательный импульс — положительное приращение. При этом абсолютная величина импульса всегда уменьшается. Интуитивно ясно, что такой процесс

<sup>11</sup> О вычислении гауссовых функциональных интегралов см., например, [41].

должен вести к затуханию колебаний осциллятора, т.е. к диссипации.

Процесс такого типа происходит при лазерном охлаждении иона в магнитной ловушке. В этом случае ион поглощает фотон лазерного излучения и затем испускает фотон таким образом, что в результате импульс уменьшается по абсолютной величине. В то же время в процессе перерассеяния фотона в окружающей среде остается информация об импульсе иона, т.е. фактически происходит измерение импульса. Если фотоны взаимодействуют с ионом достаточно часто, процесс можно описывать как непрерывное неминимально-возмущающее измерение импульса иона, ведущее к диссипации. Именно в результате диссипации уменьшается энергия иона (происходит его охлаждение).

При подстановке (48) уравнение для матрицы плотности (46) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] - \frac{\kappa}{2} [\hat{p}, [\hat{p}, \hat{\rho}]] - \\ & - \frac{\lambda^2 \omega^2}{8\kappa \hbar^2} [\hat{q}, [\hat{q}, \hat{\rho}]] - \frac{i\lambda\omega}{2\hbar} [\hat{q}, [\hat{p}, \hat{\rho}]]_+. \end{aligned} \quad (51)$$

Это уравнение известно как представляющее броуновское движение осциллятора [38]. В данном случае мы получили его как описание эволюции осциллятора, импульс которого непрерывно измеряется, причем при измерении происходит передача импульса, уменьшающая его абсолютную величину.

На самом деле пока мы нигде не использовали конкретный вид гамильтониана осциллятора, так что полученное уравнение описывает неминимально-возмущающее измерение импульса в одномерной системе с произвольным потенциалом. Сравнивая его с уравнением (11), выведенным из модели Калдейры–Леггета, мы видим, что уравнение (51) отличается наличием в нем члена, описывающего декогеренцию импульса<sup>12</sup> (это член с двойным коммутатором матрицы плотности с импульсом, о декогеренции см. раздел 2.2). Появление этого члена неудивительно, потому что с самого начала мы потребовали, чтобы происходило измерение импульса, и ввели параметр  $\kappa$  именно как константу, определяющую разрешение, с которым измеряется импульс. Однако мы видим, что в уравнении для матрицы плотности появился также двойной коммутатор с координатой, т.е. при эволюции системы происходит также декогеренция (непрерывное измерение) координаты с разрешением, определяемым константой  $\lambda^2 \omega^2 / 4\kappa \hbar^2$ .

Это, впрочем, неудивительно, так как *непрерывное* измерение импульса дает информацию о координате и наоборот. Интуитивно легче представить второе из этих явлений. Предположим, что мы непрерывно измеряем координату частицы. Результат измерения представляется коридором путей в координатном пространстве и означает, что частица движется внутри этого коридора. Но это дает также определенную информацию о скорости частицы в каждый момент, т.е. означает одновременное непрерывное измерение ее скорости, а значит, и импульса.

Может возникнуть вопрос: какое же из двух уравнений — (11) или (51) — более точно описывает проис-

ходящее? Кроме приведенного только что интуитивного рассуждения, есть и более определенное свидетельство в пользу уравнения (51). Дело в том, что (как демонстрируется уравнением (46)) уравнение (51) относится к классу уравнений Линдблада, т.е. сохраняет положительность матрицы плотности, тогда как уравнение (11) этим свойством не обладает.

Интересно найти сдвиг энергии, вызванный процедурой измерения. Считывая сдвиг в уравнении (46) при  $\hat{C} = 0$  и используя определения (48), получаем для сдвига энергии осциллятора под действием измерения

$$\Delta \hat{H} = -\frac{i\kappa \hbar}{4} (\hat{L}^{\dagger 2} - \hat{L}^2) = \frac{\lambda\omega}{4} (\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}). \quad (52)$$

Комбинируя это выражение с гамильтонианом (47), выразим эффективный (перенормированный измерением) гамильтониан в виде

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{эф}} = & \frac{1}{2m} (\hat{p}^2 + m^2 \omega^2 \hat{q}^2) + \frac{\lambda\omega}{4} (\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}) = \\ = & \frac{1}{2m} \left( \hat{p} + \frac{\lambda\omega m}{2} \hat{q} \right)^2 + \frac{m}{2} \left( \omega^2 - \frac{\lambda^2 \omega^2}{4} \right) \hat{q}^2. \end{aligned} \quad (53)$$

Если положить

$$\gamma = \frac{\lambda\omega}{2}, \quad (54)$$

то новая частота осциллятора, фигурирующая в уравнении (53), совпадает с известным выражением

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \quad (55)$$

для эффективной частоты классического осциллятора с трением, описываемого уравнением

$$m\ddot{q} + 2m\gamma\dot{q} + m\omega^2 q = F(t). \quad (56)$$

Выражение (54) для коэффициента трения (коэффициента релаксации) согласуется также с видом уравнений (58) ниже. Кроме того, оно показывает, что диссипативный член в уравнениях (51) и (11) один и тот же.

Из уравнения (51) следуют уравнения для первых моментов (т.е. средних значений)<sup>13</sup> наблюдаемых  $\hat{p}$  и  $\hat{q}$ :

$$\left\langle \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} \right\rangle = -m\omega^2 \langle \hat{q} \rangle - \lambda\omega \langle \hat{p} \rangle, \quad (57)$$

$$\left\langle \frac{\partial \hat{q}}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{m} \langle \hat{p} \rangle.$$

Вторые моменты (средние от квадратичных комбинаций этих наблюдаемых) удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{p}^2 \rangle = & -m\omega^2 \langle \hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p} \rangle - 2\lambda\omega \langle \hat{p}^2 \rangle + \frac{\lambda^2 \omega^2}{4\kappa}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p} \rangle = & -\lambda\omega \langle \hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p} \rangle + 2 \left( \frac{1}{m} \langle \hat{p}^2 \rangle - m\omega^2 \langle \hat{q}^2 \rangle \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{q}^2 \rangle = & \frac{1}{m} \langle \hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p} \rangle + \kappa \hbar^2. \end{aligned} \quad (58)$$

<sup>12</sup> Диссипативный член в этих уравнениях один и тот же (см. определение (54)).

<sup>13</sup> Среднее значение оператора  $\hat{A}$  в состоянии  $\hat{\rho}$  определяется как  $\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{A})$ .

Последний член в третьем из уравнений (58) пропорционален  $\hbar^2$  и, следовательно, является чисто квантовым. Этот член необходим для того, чтобы эволюция системы носила линдбладовский характер, но его появление нелегко интерпретировать [38, 66]. Однако в рамках квантовой теории измерений этот член естественным образом интерпретируется как следствие соотношения неопределенностей (см. [56] и [3, раздел 4.3.4], где рассмотрена дуальная ситуация с непрерывным измерением координаты). Действительно, с течением времени импульс, в результате его непрерывного измерения, становится известен со все меньшей и меньшей погрешностью:  $\Delta p_i^2 = 1/\chi t$  (см. [3, раздел 5.1.3]). Неопределенность координаты при этом возрастает в силу соотношения неопределенностей. При достаточно малых временах закон роста неопределенности координаты количественно правильно описывается квантовым членом в (58).

Система уравнений (58) имеет стационарное решение:

$$\begin{aligned} \langle \hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p} \rangle &= -m\chi\hbar^2, \\ \frac{1}{2m} \langle \hat{p}^2 \rangle &= \frac{\lambda\omega}{16\chi m} + \frac{m\omega\chi\hbar^2}{4\lambda}, \\ \frac{1}{2} m^2\omega^2 \langle \hat{q}^2 \rangle &= \frac{\lambda\omega}{16\chi m} + \frac{m\omega\chi\hbar^2}{4\lambda} + \frac{1}{4} m\lambda\omega\chi\hbar^2, \end{aligned} \quad (59)$$

которое показывает, на чем стабилизируется эволюция измеряемой системы. Видно, что решение (59) согласуется с классической теоремой вириала (средняя кинетическая и средняя потенциальная энергии должны быть равны друг другу) с точностью до величины  $m\lambda\omega\chi\hbar^2/4$ , исчезающей в классическом пределе.

Из уравнений (59) для среднего значения свободного гамильтониана получаем

$$\langle \hat{H} \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{m} \hat{p}^2 + m\omega^2 \hat{q}^2 \right\rangle = \frac{\lambda\omega}{8m\chi} + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2\lambda^2} \right) m\lambda\omega\chi\hbar^2. \quad (60)$$

Для среднего от перенормированного гамильтониана это дает выражение

$$\langle \hat{H}_{\text{eff}} \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \left( \frac{m\chi\hbar}{\lambda} + \frac{\lambda}{4m\chi\hbar} \right), \quad (61)$$

которое зависит от отношения двух безразмерных параметров: константы  $m\chi\hbar$ , характеризующей силу (разрешающую способность) измерения, и константы  $\lambda$ , определяющей величину неминимального возмущения измеряемой системы, ведущего к ее диссипации.

Нетрудно видеть, что величина (61) достигает минимума, равного  $\hbar\omega/2$ , при

$$\lambda = 2m\chi\hbar \quad (62)$$

и неограниченно увеличивается при стремлении отношения  $\lambda/m\chi\hbar$  к нулю или к бесконечности. Поскольку при условии (62) конечная энергия осциллятора минимальна, соотношение (62) можно назвать условием наиболее эффективного охлаждения измерением.

### 3.5. Осциллятор при тепловом равновесии

Предположим, что резервуар, производящий измерение осциллятора, является термостатом при заданной температуре  $T$  и что осциллятор находится в равновесии с

ним (это возможно, когда он переходит в стационарное состояние). Тогда матрица плотности осциллятора соответствует распределению Гиббса по его энергиям. Применяя это распределение для вычисления средней энергии или, что то же, среднего значения квантового числа  $\hat{n} = a^\dagger a$ , получаем

$$\begin{aligned} \langle \hat{n} \rangle &= \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}, \\ \langle \hat{H} \rangle &= \hbar\omega \left\langle \hat{n} + \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT}. \end{aligned} \quad (63)$$

С учетом соотношения (60) это дает для коэффициента  $\lambda$  уравнение

$$\lambda \left( \frac{1}{4m\chi\hbar} + \frac{m\chi\hbar}{2} \right) + \frac{m\chi\hbar}{\lambda} = \coth \frac{\hbar\omega}{2kT}. \quad (64)$$

Из этого уравнения коэффициент  $\lambda$  выражается через температуру резервуара и разрешающую способность измерения  $\chi$ . Это означает, что степень неминимального возмущения осциллятора при его измерении зависит от температуры резервуара. Заметим, что формула (64) выведена в предположении, что осциллятор находится в тепловом равновесии с резервуаром.

Уравнение (64) имеет решение лишь при условии

$$\sqrt{1 + 2(m\chi\hbar)^2} < \coth \frac{\hbar\omega}{2kT}. \quad (65)$$

При высоких температурах ( $kT \gg \hbar\omega$ ) решение в предположении  $m\chi\hbar \ll 1$  имеет вид

$$\lambda = 4m\chi\hbar \frac{2kT}{\hbar\omega} = \frac{8m\chi kT}{\omega}. \quad (66)$$

Константа Планка в это соотношение не входит, как и должно быть в классическом режиме. При низких температурах ( $kT \ll \hbar\omega$ ) решение существует при

$$2(m\chi\hbar)^2 < \coth \frac{\hbar\omega}{2kT} - 1 \quad (67)$$

и имеет вид

$$\lambda = 2m\chi\hbar, \quad (68)$$

что совпадает с условием наиболее эффективного охлаждения при малой диссипации (см. конец раздела 3.4).

Напомним, что выводы сделаны в предположении теплового равновесия между осциллятором и резервуаром. По-видимому, между параметрами  $\lambda$  и  $\chi$  могут существовать и другие соотношения, однако тепловое равновесие при этом невозможно.

Таким образом, мы получили корректное описание броуновского движения квантового осциллятора в терминах непрерывных измерений. Все заключения сделаны в рамках определенной модели непрерывного измерения. В этой модели импульс подвергается непрерывному мониторингу и при этом неминимальным образом возмущается (см. замечание после уравнения (49)). Кроме того, мы показали, хотя и с меньшими деталями, что неминимально-возмущающий мониторинг некоторой наблюдаемой, описываемый ограниченными интегралами по путям с весовым функционалом вида (40), ведет к диссипации.

В общем случае воздействие резервуара описывается более сложными ограниченными интегралами по путям

(см. раздел 4). Однако важный класс воздействий можно представить как мониторинг одной или нескольких наблюдаемых, если ввести в показатель экспоненты функционала (40) дополнительные члены. Уравнения для вектора состояния и матрицы плотности системы, подвергающейся такому воздействию, легко получить по аналогии с тем, как это делалось в разделе 3.3.

Интересный вопрос состоит в том, как реализовать на практике воздействие, формально описываемое тем или иным весовым функционалом в ограниченных интегралах по путям. Один из путей решения этого вопроса продемонстрирован в [3, гл. 8] на примере двухуровневой системы. "Гауссов" мониторинг произвольной наблюдаемой такой системы представлен длинной серией кратковременных взаимодействий со вспомогательной системой (датчиком). Можно ожидать, что и в случае произвольной системы длинная серия слабых коротких взаимодействий (со статистически независимыми исходами) всегда приводит к эволюции, описываемой ограниченными интегралами по путям с гауссовым функционалом. Если это утверждение верно при достаточно общих предположениях, то оно составляет содержание квантового аналога Центральной Предельной Теоремы теории вероятностей.

#### 4. Открытая система как измеряемая

В разделе 3 мы показали, что непрерывное измерение квантовой системы ведет к ее диссипации. Теперь мы убедимся (следуя работе [65]), что на самом деле верно и обратное: всякую диссипативную систему можно рассматривать как систему, подвергающуюся непрерывному измерению своим окружением (резервуаром). Это следует из того, что открытые квантовые системы при весьма общих предположениях могут корректно описываться как системы, непрерывно измеряемые своим окружением. Их эволюция в этом случае представляется ограниченными интегралами по путям. Это означает, что развитый в разделе 3 подход к теории диссипативных квантовых систем, основанный на ограниченных интегралах по путям, является общим.

Обычно эволюция открытой квантовой системы описывается неселективно, т.е. в описании не учитывается, в каком состоянии оказывается окружение системы. В этом случае состояние открытой системы представляется ее матрицей плотности. Изменение матрицы плотности с течением времени, как правило, в хорошем приближении можно описывать уравнением, содержащим производную матрицы плотности по времени. В англоязычной литературе такое уравнение называют "master equation", что по-русски можно перевести как *управляющее уравнение*. Наиболее общий вид управляющего уравнения (5), обеспечивающий положительность матрицы плотности, выведен Линдбладом [34] из требования сохранения ее положительности.

Тот же самый процесс может быть представлен селективно. При этом состояние открытой системы описывается вектором состояния (волновой функцией), которая зависит от того, в каком состоянии оказывается окружение рассматриваемой системы в результате взаимодействия с ней. Если открытая система интерпретируется как измеряемая, а ее взаимодействие с окружением — как ее измерение, то селективное описание измеряемой системы зависит от результата измерения,

т.е. от того, какая информация о системе записывается (кодируется) в состоянии ее окружения. Селективное описание является более детальным, и от него можно перейти к неселективному, просуммировав по всем возможным состояниям окружения (по всем возможным результатам измерения).

В квантовой теории непрерывных измерений селективное описание открытой (непрерывно измеряемой) системы дается ограниченными интегралами по путям, через которые выражаются *парциальные пропагаторы* измеряемой системы. В марковском приближении процесс можно представить уравнением Шрёдингера с комплексным гамильтонианом (см. разделы 3.1–3.3). Теперь мы выясним, при каких условиях открытую квантовую систему можно рассматривать как непрерывно измеряемую и описывать при помощи ограниченных интегралов по путям.

Мы начнем с самого общего описания открытой системы при помощи функционала влияния Фейнмана – Вернона [48] и введем разложение функционала влияния на *парциальные функционалы влияния*. Тем самым эволюция открытой системы разлагается на "парциальные эволюции". Затем мы выясним, при каких условиях различные парциальные эволюции декогерируют (т.е. интерференционные эффекты между ними оказываются несущественными). Условие декогеренции обобщает известное условие совместности "квантовых историй" Гелл-Манна и Хартла [24].

Анализ показывает, что набор декогерирующих эволюций существует, если окружение системы (резервуар) содержит большое число степеней свободы, т.е. является макроскопическим или мезоскопическим. Наконец, мы выясним, что при выполнении условия декогеренции описание процесса при помощи ограниченных интегралов по путям корректно, т.е. открытая система корректно описывается как непрерывно измеряемая. Парциальные эволюции в этом случае соответствуют различным результатам измерения и характеризуются не амплитудами вероятности, а вероятностями.

##### 4.1. Эволюция открытой системы

Рассмотрим открытую систему  $\mathcal{S}$ , которая взаимодействует со своим окружением (environment)  $\mathcal{E}$ . Мы рассмотрим сначала эволюцию составной системы  $\mathcal{S} + \mathcal{E}$  и интерпретируем эту эволюцию в терминах множества "парциальных эволюций". Множество парциальных эволюций можно выбрать с большой долей произвола. Нашей целью будет сформулировать условия на выбор множества, которые давали бы возможность интерпретировать эволюцию как описание непрерывного измерения системы  $\mathcal{S}$  ее окружением  $\mathcal{E}$ , а парциальные эволюции — как соответствующие альтернативным результатам измерения.

Заметим, что окружение  $\mathcal{E}$  может быть измерительным устройством, специально сконструированным, чтобы производить непрерывное измерение системы  $\mathcal{S}$ , а может быть и естественной окружающей средой, взаимодействующей с интересующей нас системой  $\mathcal{S}$  неконтролируемым образом. Однако даже в последнем случае процесс можно интерпретировать как измерение, потому что в том, как эволюционирует окружение  $\mathcal{E}$ , "записывается" (т.е. каким-то образом кодируется) определенная информация об эволюции системы  $\mathcal{S}$ . В случае, когда окружение системы является естественной средой и

не контролируется, его часто называют резервуаром. Но мы будем употреблять оба термина — "окружение" и "резервуар" — в обеих ситуациях как эквивалентные, потому что с точки зрения воздействия системы  $\mathcal{E}$  на интересующую нас систему  $\mathcal{S}$  существенной разницы между этими ситуациями нет.

**4.1.1. Эволюция системы и ее окружения.** Составная система, состоящая из системы  $\mathcal{S}$  и ее окружения  $\mathcal{E}$ , предполагается замкнутой (изолированной). Пусть гамильтониан этой системы имеет вид

$$H_{\text{tot}}(p, q, P, Q) = H(p, q) + H_{\mathcal{E}}(P, Q) + H_I(p, q, P, Q), \quad (69)$$

где гамильтонианы  $H$ ,  $H_{\mathcal{E}}$  и  $H_I$  описывают соответственно систему  $\mathcal{S}$ , которая нас интересует, ее окружение и взаимодействие между ними. (Все фигурирующие в (69) наблюдаемые могут быть многокомпонентными, а гамильтонианы могут зависеть от времени.)

Эволюция составной системы  $\mathcal{S} + \mathcal{E}$  дается формулой

$$\mathcal{R} = U^{\text{tot}} \mathcal{R}_{\text{in}} (U^{\text{tot}})^{\dagger}, \quad (70)$$

где  $\mathcal{R}$  — матрица плотности составной системы в произвольный момент времени,  $\mathcal{R}_{\text{in}}$  — ее матрица плотности в начальный момент и  $U^{\text{tot}}$  — оператор эволюции составной системы в течение соответствующего интервала времени.

Оператор эволюции можно выразить в виде фейнмановского интеграла по путям<sup>14</sup>:

$$U^{\text{tot}} = \int d[p, q] \int d[P, Q] \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ A[p, q] + A_{\mathcal{E}}[P, Q] - \int_0^t dt H_I(p, q, P, Q) \right] \right\}, \quad (71)$$

где введены обозначения

$$A[p, q] = \int_0^t dt [p\dot{q} - H(p, q)], \quad (72)$$

$$A_{\mathcal{E}}[P, Q] = \int_0^t dt [P\dot{Q} - H_{\mathcal{E}}(P, Q)].$$

Эволюция подсистемы  $\mathcal{S}$  может быть представлена редуцированной матрицей плотности  $\rho$ , которая получается из  $\mathcal{R}$  взятием следа по степеням свободы подсистемы  $\mathcal{E}$ :

$$\rho = \text{Tr}_{\mathcal{E}} \mathcal{R} = \text{Tr}_{\mathcal{E}} [U^{\text{tot}} \mathcal{R}_{\text{in}} (U^{\text{tot}})^{\dagger}]. \quad (73)$$

**4.1.2. Разложение оператора эволюции.** Для дальнейшего нам требуется разложение оператора эволюции  $U^{\text{tot}}$  в сумму (точнее, в интеграл) *парциальных операторов эволюции*  $U_{\alpha}^{\text{tot}}$ :

$$U^{\text{tot}} = \int d\alpha U_{\alpha}^{\text{tot}} \quad (74)$$

(позднее альтернативы  $\alpha$  будут, при выполнении определенных условий, интерпретированы как альтернативные

результаты непрерывного измерения). Входящие в разложение (74) парциальные операторы эволюции можно определить как

$$U_{\alpha}^{\text{tot}} = \int d[p, q] \int d[P, Q] W_{\alpha}[P, Q] \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ A[p, q] + A_{\mathcal{E}}[P, Q] - \int_0^t dt H_I(p, q, P, Q) \right] \right\}, \quad (75)$$

где *весовые функционалы*<sup>15</sup>  $W_{\alpha}[P, Q]$  образуют *разложимые единицы*, т.е. имеет место соотношение

$$\int d\alpha W_{\alpha}[P, Q] = 1 \quad (76)$$

с интегрированием по некоторой мере  $d\alpha$  на множестве всех возможных альтернатив  $\alpha$ .

Используя разложение (74), можно записать матрицу плотности  $\mathcal{R}$  составной системы  $\mathcal{S} + \mathcal{E}$  как интеграл от *парциальных матриц плотности*, представляющих "*парциальные эволюции*":

$$\mathcal{R} = \int d\alpha d\beta \mathcal{R}_{\alpha\beta}, \quad \mathcal{R}_{\alpha\beta} = U_{\alpha}^{\text{tot}} \mathcal{R}_{\text{in}} (U_{\beta}^{\text{tot}})^{\dagger}. \quad (77)$$

Если матрица плотности составной системы разложена, как в формуле (77), то этим определяется соответствующее разложение редуцированной матрицы плотности для подсистемы  $\mathcal{S}$ :

$$\rho = \int d\alpha d\beta \rho_{\alpha\beta}, \quad \rho_{\alpha\beta} = \text{Tr}_{\mathcal{E}} \mathcal{R}_{\alpha\beta}. \quad (78)$$

## 4.2. Декогеренция

Сформулируем условие, при котором альтернативы, обозначенные как  $\alpha$ , характеризуются не амплитудами вероятности, а вероятностями, так что между альтернативами не возникает никаких интерференционных эффектов. Это необходимо для того, чтобы альтернативы  $\alpha$  были классическими (по другой терминологии, несовместимыми). Лишь при этом условии такие альтернативы можно интерпретировать как результаты измерения, так как альтернативные результаты измерения по определению должны быть классическими, несовместимыми, т.е. не могут интерферировать.

**4.2.1. Декогеренция системы и ее окружения.** Полный (по всем степеням свободы) след парциальных матриц плотности дает множество *обобщенных функционалов декогеренции*

$$P_{\alpha\beta} = \text{Tr} \mathcal{R}_{\alpha\beta}, \quad \int d\alpha d\beta P_{\alpha\beta} = 1. \quad (79)$$

Эти функционалы являются аналогами функционалов декогеренции, введенных Гелл-Манном и Хартлом [24]. Обобщенные функционалы декогеренции соответствуют альтернативам  $\alpha$ , которые в свою очередь представлены весовыми функционалами  $W_{\alpha}$  ("коридорами путей").

<sup>14</sup> Мы используем интеграл по путям  $[p, q, P, Q]$  в фазовом пространстве составной системы; соответственно, действие выражается в терминах гамильтониана этой системы.

<sup>15</sup> Заметим, что весовые функционалы (например, в формулах (79), (80)), вообще говоря, можно выбрать в более общей форме  $W_{\alpha}[p, q, P, Q]$ , но нам нужен лишь частный случай  $W_{\alpha}[P, Q]$ .



Аналогичные им функционалы декогеренции Гелл-Манна и Хартла соответствуют вместо этого "квантовым историям", т.е. последовательностям проекторов<sup>16</sup>.

По аналогии с определением условия совместности, которое дано Гелл-Манном и Хартлом, мы будем говорить, что альтернативы  $\alpha$  декогерируют, если выполняется *обобщенное условие совместности*:

$$P_{\alpha\beta} = \text{Tr } \mathcal{R}_{\alpha\beta} = \delta(\alpha, \beta) P_{\alpha}, \quad \int d\alpha P_{\alpha} = 1. \quad (80)$$

Здесь  $\delta(\alpha, \beta)$  — дельта-функция, определенная по отношению к мере<sup>17</sup>  $d\alpha$ , использованной в интеграле (76). Уравнение (80) означает, что *альтернативы  $\alpha$  декогерируют*, т.е. характеризуются *вероятностями  $P_{\alpha}$*  (точнее, плотностями вероятности относительно меры  $d\alpha$ ), а не амплитудами вероятности. Это необходимо для того, чтобы множество  $\{\alpha\}$  можно было рассматривать как множество *классических альтернатив*. Обычно условие (80) удовлетворяется лишь приближенно.

**4.2.2. Декогеренция, индуцированная окружением.** В общем случае декогеренция в составной системе  $\mathcal{S} + \mathcal{E}$  обеспечивается в равной степени свойствами ее составных частей  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{E}$ . Однако иногда (в частности, в ситуации измерения) декогеренция является следствием специальных свойств лишь окружения  $\mathcal{E}$ , но не системы  $\mathcal{S}$ . Нас интересует именно такая ситуация. Интуитивно ясно, что это должно иметь место, если окружение содержит большое число степеней свободы, т.е. является макроскопическим или в крайнем случае мезоскопическим. Однако вместо большого числа степеней свободы декогеренция может обеспечиваться специальными свойствами системы  $\mathcal{E}$  (ортогональностью амплитуд распространения подсистемы  $\mathcal{E}$ , соответствующих различным альтернативам).

Ситуация, в которой декогеренция вызывается лишь свойствами окружения, может быть охарактеризована математически следующим образом: дельта-функция  $\delta(\alpha, \beta)$  (наличие которой в формуле (80) означает декогеренцию) возникает не только после взятия полного следа, как в формуле (80), но уже после взятия следа по степеням свободы окружения. Это означает, что должно выполняться соотношение

$$\rho_{\alpha\beta} = \text{Tr}_{\mathcal{E}} \mathcal{R}_{\alpha\beta} = \delta(\alpha, \beta) \rho_{\alpha} \quad (81)$$

с некоторыми операторами  $\rho_{\alpha}$ . Эти операторы можно назвать декогерентными парциальными редуцированными матрицами плотности.

Если выполняется условие (81), то вместо (78) полная редуцированная матрица плотности разлагается по парциальным матрицам плотности следующим образом:

$$\rho = \int d\alpha \rho_{\alpha}. \quad (82)$$

Это разложение легко получается, если в формуле (78) использовать условие (81) и свойства дельта-функции (см. сноску 17).

Условие (81) сильнее, чем (обобщенное) условие совместности (80). Его можно назвать *условием декогерентизации окружением*. Можно ожидать, что условие (81) приближенно выполняется, если окружение содержит большое число степеней свободы, но не только в этом случае. Позднее мы покажем, что несколько более сильное условие позволяет представить эволюцию системы  $\mathcal{S}$  как результат ее непрерывного измерения окружением  $\mathcal{E}$ . Альтернативы  $\alpha$  в этом случае можно интерпретировать как *результаты измерения*, возникающие в ходе непрерывного измерения.

### 4.3. Парциальные функционалы влияния и ограниченные интегралы по путям

Теперь мы введем функционал влияния Фейнмана–Вернона, разложим его в интеграл парциальных функционалов влияния и выразим введенное ранее условие декогерентизации окружением, а также некоторое более сильное условие декогеренции в терминах парциальных функционалов влияния. Это позволит нам перейти к описанию эволюции открытой системы  $\mathcal{S}$  ограниченными интегралами по путям. После этого процесс можно интерпретировать как непрерывное измерение.

**4.3.1. Парциальные функционалы влияния.** Если принять во внимание уравнение (71), то можно выразить редуцированную матрицу плотности (73) в форме кратного интеграла по путям. Предполагая, что начальная матрица плотности составной системы факторизуется:

$$\mathcal{R}_{\text{in}}(q, Q|\bar{q}, \bar{Q}) = \mathcal{R}_{\text{in}}^{\mathcal{E}}(Q, \bar{Q}) \rho_{\text{in}}(q, \bar{q}), \quad (83)$$

и совершая функциональное интегрирование в два этапа, можно привести редуцированную матрицу плотности к виду

$$\rho(q', \bar{q}') = \int dq \int d\bar{q} \int_q^{q'} d[p, q] \int_{\bar{q}}^{\bar{q}'} d[\bar{p}, \bar{q}] \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (A[p, q] - A[\bar{p}, \bar{q}]) \right\} F[p, q|\bar{p}, \bar{q}] \rho_{\text{in}}(q, \bar{q}), \quad (84)$$

где

$$F[p, q|\bar{p}, \bar{q}] = \int dQ' \int dQ \int d\bar{Q} \int_Q^{Q'} d[P, Q] \times \\ \times \int_{\bar{Q}}^{\bar{Q}'} d[\bar{P}, \bar{Q}] \mathcal{R}_{\text{in}}^{\mathcal{E}}(Q, \bar{Q}) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ A_{\mathcal{E}}[P, Q] - \int_0^t dt H_I(p, q, P, Q) \right] \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[ A_{\mathcal{E}}[\bar{P}, \bar{Q}] - \int_0^t dt H_I(\bar{p}, \bar{q}, \bar{P}, \bar{Q}) \right] \right\} \quad (85)$$

— *функционал влияния* Фейнмана–Вернона [48] в представлении интегралов по путям в фазовом пространстве.

Парциальные редуцированные матрицы плотности (78) выражаются теперь как

$$\rho_{\alpha\beta}(q', \bar{q}') = \int dq \int d\bar{q} \int_q^{q'} d[p, q] \int_{\bar{q}}^{\bar{q}'} d[\bar{p}, \bar{q}] \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (A[p, q] - A[\bar{p}, \bar{q}]) \right\} F_{\alpha\beta}[p, q|\bar{p}, \bar{q}] \rho_{\text{in}}(q, \bar{q}) \quad (86)$$

<sup>16</sup> "Квантовые истории", как они определены в работе [24], можно рассматривать как специальные частные случаи коридоров путей, определенных весовыми функционалами в интегралах по путям, только весовые функционалы в этом случае будут сингулярными, сосредоточенными в дискретном множестве моментов времени.

<sup>17</sup> Это означает, что  $\delta(\alpha, \beta) = \delta(\beta, \alpha)$  и  $\int \delta(\alpha, \beta) f(\beta) d\beta = f(\alpha)$ .

в терминах *парциальных функционалов влияния*

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha\beta}[p, q|\bar{p}, \bar{q}] &= \int dQ' \int dQ \int d\bar{Q} \int_{\bar{Q}}^{Q'} d[P, Q] \int_{\bar{Q}}^{Q'} d[\bar{P}, \bar{Q}] \times \\
 &\times W_{\alpha}[P, Q] \mathcal{R}_{\text{in}}^{\varepsilon}(Q, \bar{Q}) W_{\beta}^*[P, \bar{Q}] \times \\
 &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ A_{\varepsilon}[P, Q] - \int_0^t dt H_I(p, q, P, Q) \right] \right\} \times \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[ A_{\varepsilon}[\bar{P}, \bar{Q}] - \int_0^t dt H_I(\bar{p}, \bar{q}, \bar{P}, \bar{Q}) \right] \right\}. \quad (87)
 \end{aligned}$$

Полный функционал влияния  $F$  равен интегралу парциальных функционалов влияния  $F_{\alpha\beta}$  по аналогии с уравнениями (77), (78).

Условие декогерентизации окружением (81) означает, что парциальный функционал влияния  $F_{\alpha\beta}$  диагонален, т.е. содержит дельта-функцию  $\delta(\alpha, \beta)$  в качестве множителя. Мы приведем аргументы в пользу того, что при довольно общих предположениях выполняется более сильное условие

$$F_{\alpha\beta}[p, q|\bar{p}, \bar{q}] = \delta(\alpha, \beta) w_{\alpha}[p, q] w_{\beta}^*[\bar{p}, \bar{q}]. \quad (88)$$

Условие (88) можно назвать *условием декогерентности парциальных функционалов влияния*. В разделе 4.3.3 показано, что это условие ведет к описанию эволюции системы  $\mathcal{S}$  при помощи ограниченных интегралов по путям, так что влияние на нее окружения можно рассматривать как непрерывное измерение системы.

**4.3.2. Анализ условия декогерентности альтернатив.** Условие (88) оказывается (приблизительно) справедливым, если альтернативы  $\alpha$ , определенные весовыми функционалами  $W_{\alpha}$  (см. уравнение (75)), выбраны правильно, так что определяемые этими функционалами множества (коридоры) путей  $[P, Q]$  достаточно, но не слишком широки<sup>18</sup>.

Обозначим коридоры путей  $[P, Q]$ , определяемые функционалами  $W_{\alpha}$ , через  $\alpha_{\varepsilon}$ . Коридоры должны быть выбраны таким образом, что: 1) если коридор не содержит никакой классической траектории (системы  $\mathcal{E}$ ), то интеграл по этому коридору пренебрежимо мал; 2) если коридор содержит некоторую классическую траекторию, то интеграл по этому коридору хорошо аппроксимируется экспонентой от действия вдоль этой траектории (приближение стационарной фазы).

Такие требования означают, что систему  $\mathcal{E}$  можно с достаточно хорошим приближением рассматривать как классическую, а каждый из коридоров ее путей  $\alpha_{\varepsilon}$  — как квантовый образ, соответствующий классическому понятию движения по классической траектории. Если система  $\mathcal{E}$  содержит достаточно много степеней свободы, т.е. является макроскопической или хотя бы мезоскопической, то выбор коридоров  $\alpha_{\varepsilon}$ , удовлетворяющих этим условиям, возможен.

Если условия 1) и 2) удовлетворяются, то величина  $F_{\alpha\beta}$  не является пренебрежимо малой лишь в одном

единственном случае: когда оба коридора  $\alpha_{\varepsilon}$ ,  $\beta_{\varepsilon}$  содержат классические траектории и все эти классические траектории близки друг к другу. Следовательно, величина  $F_{\alpha\beta}$  пренебрежимо мала каждый раз, когда либо один из коридоров  $\alpha_{\varepsilon}$ ,  $\beta_{\varepsilon}$  не содержит классических траекторий вовсе, либо каждый из них содержит классические траектории, но те из них, которые принадлежат коридору  $\alpha_{\varepsilon}$ , сильно отличаются от тех, которые принадлежат коридору  $\beta_{\varepsilon}$ <sup>19</sup>.

Эти черты приближенно представлены формулой (88). Функционал  $w_{\alpha}[p, q]$  в этой формуле оказывается пренебрежимо малым, если соответствующее множество путей  $\alpha_{\varepsilon}$  окружения (определенное весовым функционалом  $W_{\alpha}[P, Q]$ ) не содержит ни одной классической траектории.

Конкретизируем сказанное и выведем конкретные формулы для тех парциальных функционалов влияния, которые не являются пренебрежимо малыми, т.е. для таких  $F_{\alpha\beta}$ , что оба коридора  $\alpha_{\varepsilon}$  и  $\beta_{\varepsilon}$  (определенные соответственно функционалами  $W_{\alpha}[P, Q]$  и  $W_{\beta}[P, Q]$ ) содержат классические траектории. Мы предположили, что коридоры достаточно широки. По этой причине интегралы по путям в выражении (87) приближенно можно представить экспонентами от классического действия, вычисленного вдоль этих классических траекторий:

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha\beta}[p, q|\bar{p}, \bar{q}] &\approx \int_{I_{\text{fin}}(\alpha) \cup I_{\text{fin}}(\beta)} dQ' \int_{I_{\text{in}}(\alpha)} dQ \int_{I_{\text{in}}(\beta)} d\bar{Q} \mathcal{R}_{\text{in}}^{\varepsilon}(Q, \bar{Q}) \times \\
 &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [S_{\text{cl}}(Q, Q', [p, q]) - S_{\text{cl}}(\bar{Q}, Q', [\bar{p}, \bar{q}])] \right\}. \quad (89)
 \end{aligned}$$

Здесь  $I_{\text{in}}(\alpha)$  (соответственно,  $I_{\text{fin}}(\alpha)$ ) — множество начальных (соответственно, конечных) точек для классических траекторий, принадлежащих коридору  $\alpha_{\varepsilon}$ . Классическое действие  $S_{\text{cl}}(Q, Q', [p, q])$  зависит от начальной и конечной точек  $Q, Q'$  соответствующей классической траектории. Зависимость от пути  $[p, q]$  возникает потому, что согласно уравнению (87) этот путь определяет силу, действующую на систему  $\mathcal{E}$ , так что форма классической траектории системы зависит от  $[p, q]$ . То же самое справедливо для  $S_{\text{cl}}(\bar{Q}, Q', [\bar{p}, \bar{q}])$ .

Структура двойного интеграла по путям (87) позволяет рассматривать его как единый интеграл по путям, но по траекториям, "замкнутым во времени" (идушим от начального момента времени к моменту времени  $t$  и затем обратно к начальному моменту времени). В той части интеграла, которая соответствует обратному направлению времени, следует изменить знаки импульса  $P$  и скорости  $\dot{Q}$ .

По этой причине классическая траектория, приходящая в течение интервала времени  $[0, t]$  от точки  $Q$  в точку  $Q'$ , должна затем, в течение интервала  $[t, 0]$ , вернуться близко к начальной точке  $Q$ . Следовательно, точки  $Q$  и  $\bar{Q}$  в интеграле (87) должны быть близки друг к другу, иначе значение интеграла будет пренебрежимо малым<sup>20</sup>. Приближенно можно принять, что  $\bar{Q} = Q$ . Тогда уравнение

<sup>18</sup> Имеются в виду множества путей  $[P, Q]$  в фазовом пространстве окружения  $\mathcal{E}$ . Множества (коридоры) путей  $[p, q]$  в фазовом пространстве системы  $\mathcal{S}$ , которые описываются весовыми функционалами  $w_{\alpha}[p, q]$ , могут при этом оказаться сколь угодно узкими.

<sup>19</sup> В силу сделанных предположений относительно свойств коридоров классические траектории, содержащиеся в одном и том же коридоре, не могут сильно отличаться друг от друга.

<sup>20</sup> Точки  $Q$  и  $\bar{Q}$  совпадают точно, если пути  $[p, q]$  и  $[\bar{p}, \bar{q}]$  совпадают.

(89) принимает вид

$$F_{\alpha\beta}[p, q|\bar{p}, \bar{q}] \propto \int_{I_{\text{fin}}(\alpha) \cup I_{\text{fin}}(\beta)} dQ' \int_{I_{\text{in}}(\alpha) \cup I_{\text{in}}(\beta)} dQ \mathcal{R}_{\text{in}}^{\mathcal{E}}(Q, Q) \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [S_{\text{cl}}(Q, Q', [p, q]) - S_{\text{cl}}(Q, Q', [\bar{p}, \bar{q}])] \right\}. \quad (90)$$

Уравнение (90) позволяет оправдать приближенное выражение (88) для парциальных функционалов влияния и уточнить соотношение между весовыми функционалами  $W_{\alpha}[P, Q]$  (или соответствующими коридорами путей  $\alpha_{\mathcal{E}}$ ) для окружения  $\mathcal{E}$  и функционалами  $w_{\alpha}[p, q]$  (и соответствующими коридорами, которые будут обозначаться через  $\alpha$ ) для системы  $\mathcal{S}$ . Сделаем эти уточнения.

Прежде всего, области интегрирования  $I_{\text{in}}(\alpha) \cup I_{\text{in}}(\beta)$  и  $I_{\text{fin}}(\alpha) \cup I_{\text{fin}}(\beta)$  в уравнении (90) показывают, что интеграл не равен нулю, только если альтернативы  $\alpha$  и  $\beta$  очень близки друг к другу. Это приближенно представлено дельта-функцией  $\delta(\alpha, \beta)$ .

Теперь рассмотрим зависимость от классических траекторий, вдоль которых вычисляются классические действия в (90), соответственно от путей  $[p, q]$  и  $[\bar{p}, \bar{q}]$ . При этом учтем, что путь  $[p, q]$  (соответственно,  $[\bar{p}, \bar{q}]$ ) системы  $\mathcal{S}$  определяет силу, действующую на систему  $\mathcal{E}$ , и тем самым классическую траекторию этой системы, лежащую в коридоре  $\alpha_{\mathcal{E}}$  (соответственно,  $\beta_{\mathcal{E}}$ ); см. комментарии после формулы (89). Выражение (90) написано в предположении, что пути  $[p, q]$ ,  $[\bar{p}, \bar{q}]$  таковы, что обе классические траектории близки к серединам соответствующих коридоров  $\alpha_{\mathcal{E}}$ ,  $\beta_{\mathcal{E}}$ .

Обозначим через  $[p_x, q_x]$  тот путь системы  $\mathcal{S}$ , при выборе которого классическая траектория системы  $\mathcal{E}$  лежит в середине коридора  $\alpha_{\mathcal{E}}$ . Если альтернативы  $\alpha$ ,  $\beta$  совпадают друг с другом и пути  $[p, q]$ ,  $[\bar{p}, \bar{q}]$  совпадают с  $[p_x, q_x]$ , то выражение (90) вещественно и имеет максимальную абсолютную величину. Если  $[p, q]$ ,  $[\bar{p}, \bar{q}]$  отклоняются от  $[p_x, q_x]$ , то выражение (90) несправедливо: вместо него следует вернуться к (87), причем интеграл становится пренебрежимо малым. Факторы  $w_{\alpha}[p, q]$ ,  $w_{\beta}[\bar{p}, \bar{q}]$  в формуле (88) становятся все меньше и меньше по абсолютной величине по мере того, как отклонение путей возрастает, и могут стать комплексными. Фактор  $w_{\alpha}[p, q]$  (соответственно,  $w_{\beta}[\bar{p}, \bar{q}]$ ) становится пренебрежимо малым, когда путь  $[p, q]$  (соответственно,  $[\bar{p}, \bar{q}]$ ) таков, что коридор  $\alpha_{\mathcal{E}}$  (соответственно,  $\beta_{\mathcal{E}}$ ) не содержит классических траекторий.

**4.3.3. Вывод ограниченных интегралов по путям.** Предположим, что альтернативы  $\alpha$  выбраны правильно (в соответствии с требованиями, сформулированными в разделе 4.3.2), так что условие (88) выполняется. В этом случае альтернативы  $\alpha$  декогерентны, т.е. их можно рассматривать как классические альтернативы. Легко показать, что в этом случае система  $\mathcal{S}$  эволюционирует в точном соответствии с тем, как описывается эволюция непрерывно измеряемой системы в подходе, в котором используются ограниченные интегралы по путям (см. разделы 3.1, 3.3). Альтернативы  $\alpha$  играют тогда роль различных *результатов измерения*.

В самом деле, если условие (88) выполняется, то в соответствии с уравнением (86) парциальные матрицы плотности системы  $\mathcal{S}$  принимают вид

$$\rho_{\alpha\beta} = \delta(\alpha, \beta) U_{\alpha} \rho_{\text{in}} U_{\alpha}^{\dagger}, \quad (91)$$

где фигурируют *декогерентные* парциальные операторы эволюции<sup>21</sup> для *открытой системы*  $\mathcal{S}$ :

$$U_{\alpha} = \int d[p, q] w_{\alpha}[p, q] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^t [p\dot{q} - H(p, q)] \right\}. \quad (92)$$

Закон эволюции для открытой системы  $\mathcal{S}$  принимает вид

$$\rho_{\alpha} = U_{\alpha} \rho_{\text{in}} U_{\alpha}^{\dagger}, \quad \rho = \int d\alpha \rho_{\alpha} = \int d\alpha U_{\alpha} \rho_{\text{in}} U_{\alpha}^{\dagger}. \quad (93)$$

Первая из формул (93) представляет собой селективное описание эволюции системы  $\mathcal{S}$  (т.е. ее эволюции при условии заданной альтернативы  $\alpha$ ), в то время как вторая формула дает неселективное описание того же самого процесса (когда учитываются все возможные альтернативы).

Селективную форму закона эволюции можно эквивалентно выразить в терминах векторов состояния (вместо матриц плотности):

$$|\psi_{\alpha}\rangle = U_{\alpha} |\psi_{\text{in}}\rangle. \quad (94)$$

Неселективное описание возможно лишь в терминах матрицы плотности.

Формулы (92)–(94) характерны для описания непрерывных квантовых измерений с помощью ограниченных интегралов по путям (см. раздел 3.1). При этом альтернативы  $\alpha$  интерпретируются как альтернативные результаты непрерывных измерений. Следовательно, мы вывели описание непрерывного измерения с помощью ограниченных интегралов по путям, отправляясь от стандартного описания открытой системы и выбирая семейство альтернатив  $\{\alpha\}$  таким образом, чтобы выполнялись условие декогерентизации окружением (81) и близкое к нему условие (88) на парциальные функционалы влияния.

Тем самым мы показали, что открытая система при довольно общих предположениях (в частности, если ее окружение содержит достаточно много степеней свободы, т.е. является макроскопическим или мезоскопическим) может быть интерпретирована как система, подвергающаяся непрерывному измерению со стороны ее окружения. Поскольку диссипация возникает в результате воздействия на систему ее окружения (резервуара), т.е. в результате открытости системы, мы приходим к выводу, что диссипацию можно считать результатом непрерывного измерения системы и описывать при помощи ограниченных интегралов по путям, как в разделе 3.

#### 4.4. Декогеренция альтернатив и измерение

Подытожим сделанное в разделах 4.1–4.3. Мы рассмотрели открытую систему и разложили ее эволюцию на сумму парциальных эволюций. Мы показали, что эволюцию открытой системы можно корректно описать в рамках подхода, основанного на ограниченных интегралах по путям, если выбрать множество альтернативных парциальных эволюций так, чтобы альтернативы были декогерентны, как следствие специфических черт окружения системы.

<sup>21</sup> Эти операторы не следует смешивать с парциальными операторами эволюции  $U_{\alpha}^{\text{tot}}$  для замкнутой составной системы  $\mathcal{S} + \mathcal{E}$ .

Математически условие того, что открытая система эволюционирует как непрерывно измеряемая, формулируется как *условие декогерентности парциальных функционалов влияния* (88) или с помощью более слабого (но практически эквивалентного, если окружение содержит большое число степеней свободы) *условия декогерентности окружением* (81).

Каждая альтернатива  $\alpha$  представлена коридором путей  $[p, q, P, Q]$  составной системы  $S + E$ , но для анализа необходимо рассмотреть входящие в этот коридор пути  $[p, q]$  системы  $S$  и пути  $[P, Q]$  системы  $E$ . Последние обозначаются через  $\alpha_E$ . Для выполнения условия декогерентности важно, чтобы коридоры  $\alpha_E$  обладали классическими свойствами, т.е. являлись квантовыми образами классического понятия "движение по классической траектории". Это оказывается возможным, если система  $E$  имеет много степеней свободы (является макроскопической или мезоскопической).

Между путями  $[p, q]$ , входящими в  $\alpha$ , с одной стороны, и путями  $[P, Q]$ , входящими в  $\alpha_E$ , с другой стороны, существует корреляция. Она возникает в результате того, что в рамках формализма функционалов влияния каждый путь  $[p, q]$  системы  $S$  определяет силу, действующую на систему  $E$ , и тем самым определяет ее классические траектории. Корреляция возникает потому, что при любом выборе пути  $[p, q]$ , входящего в  $\alpha$ , геодезическая системы  $E$  лежит близко к середине коридора  $\alpha_E$  (иначе функционал влияния близок к нулю). Именно благодаря этой корреляции геодезические (а более точно, коридоры путей  $\alpha_E$ ) системы  $E$  содержат в себе информацию о путях системы  $S$ . По сути дела это означает, что система  $E$  производит измерение системы  $S$ , а результат измерения записывается в состоянии системы  $E$ , а именно — в том, по какой геодезической (точнее, по какому коридору  $\alpha_E$ ) движется система  $E$ .

Результаты проведенного анализа дают наиболее общее обоснование такого подхода к квантовым непрерывным измерениям, в котором используются ограниченные интегралы по путям. Они подтверждают, что фейнмановская теория амплитуд и фейнмановская техника интегралов по путям справедливы не только для замкнутых, но также для открытых систем. Это важно, потому что фейнмановский формализм обеспечивает физически прозрачное представление квантовой механики и оказывается эффективным как для вычислений, так и для эвристических рассуждений.

Наконец, проведенный анализ показывает, что диссипативные квантовые системы могут рассматриваться как системы, непрерывно измеряемые их окружением. Подход к описанию диссипации, в котором используются ограниченные интегралы по путям и (в марковском приближении) комплексные гамильтонианы (см. раздел 3), оказывается применимым при весьма общих предположениях. Следовательно, его можно использовать для построения теории диссипации, не опирающейся на конкретные модели резервуара.

## 5. Заключение

Мы рассмотрели различные подходы к теории квантовых систем с диссипацией, таких как частица, диффундирующая через среду. Было показано, что попытки "проквантовать" классические диссипативные уравнения встречаются с трудностями, потому что вступают в

противоречие с принципом неопределенности. Физически оправданным является вывод диссипации из явного рассмотрения окружения системы (резервуара). Основным приемом, позволившим преодолеть технические трудности на этом пути, состоял в том, что резервуар моделировался как система, состоящая из большого числа осцилляторов, после чего производился переход к нормальным модам системы. Однако этот технически сложный путь не является необходимым, потому что тот же принцип неопределенности указывает на возможность универсального, не зависящего от модели, описания диссипации квантовой системы.

Такое универсальное, модельно независимое описание диссипации удастся получить в рамках квантовой теории непрерывных измерений. Причина этого в том, что окружение любой открытой (в том числе диссипативной) системы, если оно достаточно велико (макроскопическое или хотя бы мезоскопическое), производит измерение системы. Наиболее общий подход к теории непрерывно измеряемых и в том числе диссипативных систем обеспечивается техникой ограниченных интегралов по путям. Это означает, что в фейнмановском интеграле по путям, представляющем эволюцию системы, интегрирование ограничивается лишь на те пути, которые совместимы с информацией, полученной в результате измерения. Прозрачность физического смысла такой процедуры делает этот подход эвристически ценным.

В очень важном случае, когда непрерывное измерение представляет собой мониторинг, т.е. разворачивается шаг за шагом, локально во времени, ограниченный интеграл по путям сводится к уравнению Шрёдингера с комплексным гамильтонианом или к уравнению для матрицы плотности. Последнее автоматически оказывается уравнением типа уравнения Линдблада, т.е. сохраняет положительность матрицы плотности. Это позволяет уточнить некоторые уравнения, полученные ранее в рамках модельных подходов.

По сравнению с рассмотрением различных моделей резервуара подход, основанный на ограниченных интегралах по путям и комплексных гамильтонианах, оказался предпочтительным, во-первых, из-за того, что он является модельно-независимым и позволяет делать общие заключения, а во-вторых, в силу его математической простоты: ведь в нем не требуется вводить и затем исключать из рассмотрения (операцией редукции) огромное число степеней свободы резервуара.

Добавим к сказанному, что выводы теории диссипативных квантовых систем можно теперь проверять экспериментально. Дело в том, что в последние десятилетия созданы квантово-оптические устройства, позволяющие экспериментально исследовать процессы квантовых измерений, а значит, и процессы квантовой диссипации [31, 54, 55].

Автор благодарен В.А. Намиоту за плодотворные дискуссии.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (02-01-00534а).

## Список литературы

1. Caldeira A O, Leggett A J *Physica A* **121** 587 (1983)
2. Caldeira A O, Leggett A J *Phys. Rev. A* **31** 1059 (1985)
3. Менский М Б *Квантовые измерения и декогеренция. Модели и феноменология* (М.: Физматлит, 2001) [Mensky M B *Quantum*

- Measurements and Decoherence. Models and Phenomenology* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000)]
4. Менский М Б *УФН* **168** 1017 (1998); Mensky MB, quant-ph/9812017
  5. Mensky M B, Stenholm S *Phys. Lett. A* **308** 243 (2003)
  6. Kanai E *Prog. Theor. Phys.* **3** 440 (1948)
  7. Araki Sh *J. Coll. Dairying* **10** 13 (1983)
  8. Araki Sh *J. Coll. Dairying* **11** 243 (1985)
  9. Kostin M D *J. Chem. Phys.* **57** 3589 (1972)
  10. Yasue K *Ann. Phys.* (New York) **114** 479 (1978)
  11. Dekker H *Phys. Rev. A* **16** 2126 (1977)
  12. Louisell W H *Quantum Statistical Properties of Radiation* (New York: Wiley, 1973)
  13. Koch R H, Van Harlingen D J, Clarke J *Phys. Rev. Lett.* **45** 2132 (1980)
  14. Benguria R, Kac M *Phys. Rev. Lett.* **46** 1 (1981)
  15. Nakajima S *Prog. Theor. Phys.* **20** 948 (1958)
  16. Senitzky I R *Phys. Rev.* **119** 670 (1960)
  17. Zwanzig R *J. Chem. Phys.* **33** 1338 (1960)
  18. Mori H *Prog. Theor. Phys.* **33** 423 (1965)
  19. Кадомцев Б Б *Динамика и информация* (М.: Ред. журн. "Успехи физических наук", 1997; 2-е изд. — 1999)
  20. Haken H *Rev. Mod. Phys.* **47** 67 (1975)
  21. Haake F "Statistical treatment of open systems by generalized master equations", in *Quantum Statistics in Optics and Solid-State Physics* (Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 66) (Berlin: Springer-Verlag, 1973)
  22. Haake F, Walls D F, in *Quantum Optics IV* (Springer Proc. in Physics, Vol. 12, Eds J D Harvey, D F Walls) (Berlin: Springer, 1986)
  23. Dowker H F, Halliwell J J *Phys. Rev. D* **46** 1580 (1992)
  24. Gell-Mann M, Hartle J B *Phys. Rev. D* **47** 3345 (1993)
  25. Zeh H D *Found. Phys.* **3** 109 (1973)
  26. Zurek W H *Phys. Rev. D* **26** 1862 (1982)
  27. Joos E, Zeh H D *Z. Phys. B* **59** 223 (1985)
  28. Walls D F, Milburn G J *Phys. Rev. A* **31** 2403 (1985)
  29. Unruh W G, Zurek W H *Phys. Rev. D* **40** 1071 (1989)
  30. Braginsky V B, Khalili F Ya *Quantum Measurement* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992)
  31. Walls D F, Milburn G J *Quantum Optics* (Berlin: Springer-Verlag, 1994)
  32. Zeh H D *The Physical Basis of the Direction of Time* 2nd ed. (Berlin: Springer-Verlag, 1992)
  33. Giulini D et al. *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory* (Berlin: Springer, 1996)
  34. Lindblad G *Commun. Math. Phys.* **48** 119 (1976)
  35. Ambegaokar V *Ber. Bunsen. Phys. Chem.* **95** 400 (1991)
  36. Munro W J, Gardiner C W *Phys. Rev. A* **53** 2633 (1996)
  37. Gnutzmann S, Haake F *Z. Phys. B* **101** 263 (1996)
  38. Stenholm S, in *Quantum Dynamics of Simple Systems* (Eds G-L Oppo et al.) (Bristol: Institute of Physics Publ., 1996) p. 304
  39. Халили Ф Я *Вестн. Моск. ун-в. Сер. 3. Физ. Астрон.* **29** (5) 13 (1988)
  40. Feynman R P *Rev. Mod. Phys.* **20** 367 (1948)
  41. Менский М Б *Группа путей: измерения, поля, частицы* (М.: Наука, 1983) 2-е изд. (М.: Едиториал УРСС, 2003)
  42. Mensky M B *Continuous Quantum Measurements and Path Integrals* (Bristol: Institute of Physics Publ., 1993)
  43. Фейнман Р, Хибс А *Квантовая механика и интегралы по траекториям* (М.: Мир, 1968) [Feynman R P, Hibbs A R *Quantum Mechanics and Path Integrals* (New York: McGraw-Hill, 1965)]
  44. Mensky M B *Phys. Lett. A* **231** 1 (1997)
  45. Plenio M B, Knight P L *Rev. Mod. Phys.* **70** 101 (1998)
  46. Presilla C, Onofrio R, Tambini U *Ann. Phys.* (New York) **248** 95 (1996)
  47. Albeverio S, Kolokol'tsov V N, Smolyanov O G *Rev. Math. Phys.* **9** 907 (1997)
  48. Feynman R P, Vernon F L (Jr) *Ann. Phys.* (New York) **24** 118 (1963)
  49. Hu B L, Paz J P, Zhang Y *Phys. Rev. D* **45** 2843 (1992)
  50. Zurek W H *Prog. Theor. Phys.* **89** 281 (1993)
  51. Zurek W H, in *Frontiers of Nonequilibrium Statistical Physics* (NATO ASI Series, Ser. B, Eds G T Moore, M O Scully) (New York: Plenum Press, 1986) p. 145
  52. Milburn G J, Walls D F *Phys. Rev. A* **38** 1087 (1988)
  53. Schenzle A *Contemp. Phys.* **37** 303 (1996)
  54. Davidovich L et al. *Phys. Rev. A* **53** 1295 (1996)
  55. Raimond J M, Brune M, Haroche S *Phys. Rev. Lett.* **79** 1964 (1997)
  56. Konetchnyi A, Mensky M, Namiot V *Phys. Lett. A* **177** 283 (1993)
  57. Mensky M B *Phys. Rev. D* **20** 384 (1979)
  58. Менский М Б *ЖЭТФ* **77** 1326 (1979)
  59. Халили Ф Я *Вестн. Моск. ун-в. Сер. 3. Физ. Астрон.* **22** (1) 37 (1981)
  60. Barchielli A, Lanz L, Prosperi G M *Nuovo Cimento B* **72** 79 (1982)
  61. Caves C M *Phys. Rev. D* **33** 1643 (1986)
  62. Aharonov Y, Vardi M *Phys. Rev. D* **21** 2235 (1980)
  63. Mensky M *Phys. Lett. A* **196** 159 (1994)
  64. Менский М Б *Метод индуцированных представлений: пространство-время и концепция частиц* (М.: Наука, 1976); 2-е изд. (М.: Едиториал УРСС, 2003)
  65. Mensky M B *Phys. Lett. A* **307** 85 (2003); Talk at *3rd Intern. Sakharov Conf. on Physics, Moscow, Russia, June 24–29, 2002*; quant-ph/0211116
  66. Gallis M R *Phys. Rev. A* **48** 1028 (1993)

## Dissipation and decoherence in quantum systems

**M.B. Menskiĭ**

*P.N. Lebedev Physics Institute, Russian Academy of Sciences,  
Leninskiĭ prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation  
Tel. (7-095) 135-62 19. Fax (7-095) 135-78 80  
E-mail: mensky@lebedev.ru*

The theory of dissipative quantum systems and its relation to the quantum theory of continuous measurements are reviewed. Constructing a correct theory of a dissipative quantum system requires that the system's interaction with its environment (reservoir) be taken into account. Since information about the system is 'recorded' in the state of the reservoir, the quantum theory of continuous measurements can be used to account for the influence of the reservoir. If this theory is based on the use of restricted path integrals, it does not require an explicit model of the reservoir and is therefore much simpler technically.

PACS numbers: **03.65.-w**, 03.65.Ta, 03.65.Yz

Bibliography — 66 references

Received 23 May 2003