Сентябрь 2003 г. Том 173, № 9

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

Топологическая фаза в классической механике

Г.Б. Малыкин, С.А. Харламов

История открытия топологической фазы в классической механике рассматривается на периоде времени с середины XIX века по настоящее время. Этот период можно разделить на три этапа. Первый этап, относящийся к середине XIX века, — это изучение кинематики вращения твердого тела. Представлена цепь событий, начинающаяся с теоремы Эйлера о конечном повороте твердого тела и формулы Гаусса об избытке суммы углов сферического многоугольника, продолженная Родригом, доказавшим некоммутативность двух конечных поворотов, и завершившаяся формулировкой и доказательством теоремы о телесном угле Гамильтоном в его "Лекциях по теории кватернионов". Второй этап связан с экспериментальным обнаружением неголономной ошибки гироскопических приборов и его исчерпывающим объяснением, которое принадлежит А.Ю. Ишлинскому. На третьем этапе, начавшемся в 80-х годах XX века, неголономный эффект снова открыт в рамках гамильтонова формализма. На этом этапе центральное место занимает формирование топологической фазы, или дополнительного угла в механической системе, рассматриваемой в переменных "действие – угол".

PACS numbers: **01.65.+g**, 03.65.Vf, 45.40.Cc

Содержание

1. Введение

Около 20 лет назад М. Берри в своей известной статье [1] на ряде примеров из квантовой механики поставил вопрос об условиях возникновения топологической фазы, описывающей эволюцию волновой функции Шрёдингера при зависящем от времени гамильтониане. Эта топологическая (геометрическая) фаза в статье Б. Саймона [2], вышедшей незадолго до [1] и по сути дела анонсировавшей ее появление, получила название *фазы Берри*. Фаза Берри описывает дополнительный фазовый набег, испытываемый квантовомеханическим объектом в процессе его пространственной эволюции и определенный топологическими свойствами оператора эволюции в гильбертовом пространстве, а не локальной квантовой динамикой как таковой.

За прошедшие годы вышло большое число публикаций, посвященных данному вопросу. Понятие топологической фазы существенно расширилось и стало применяться в различных разделах физики, как показано в обзорах [3 – 9]. При этом топологическую фазу часто именуют фазой Берри. В работе [10] Берри ввел понятие геометрической фазы в оптике для луча, распространяющегося по неплоской траектории. Однако вскоре после публикации [10] выяснилось, что понятие топологической (геометрической) фазы в оптике было сформулировано задолго до этой работы. Для луча, распространяющегося по неплоской траектории, оно было введено в работах С.М. Рытова [11, 12], опубликованных в 1938 г. и 1940 г. соответственно, а также в работе В.В. Владимирского [13], опубликованной в 1941 г. Для луча, распространяющегося по прямой, но состояние поляризации которого изменяется по мере распространения, оно было сформулировано в работах Панчаратнама в 1956 г. [14, 15]. Это обстоятельство отметил сам Берри (в работе [6] он указал на роль работ Панчаратнама [14, 15], а в работе [4] — на роль работ Рытова [11] и Владимирского [13]). В настоящее время вопрос о приоритетах открытия топологической фазы в оптике полностью решен. Ныне

Г.Б. Малыкин. Институт прикладной физики РАН, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова 46, Российская Федерация
Тел. (8312) 16-43-70. E-mail: malykin@mail.nnov.ru
С.А. Харламов. НИИ прикладной механики им. В.И. Кузнецова 111123 Москва, Авиамоторная 55, Российская Федерация
Тел. (095) 273-33-00
E-mail: niipm-gyro@dol.ru; sakharlam@mtu-net.ru

Статья поступила 9 апреля 2003 г.

прочно установились такие термины, как *эффект Рытова, фаза Рытова – Владимирского* и *фаза Панчаратнама*. Совершенно иная ситуация сложилась в классической механике, где распространенным является мнение о том, что понятие топологической фазы в этой области первым ввел Дж. Ханней в работе [17], опубликованной в 1985 г. Цель настоящей работы — последовательное и систематическое изложение работ, посвященных рассмотрению вопросов топологической фазы в классической механике, начиная с XIX века.

2. Работа У. Р. Гамильтона (1805 – 1865)

Сэр Уильям Роуэн Гамильтон в первом издании его книги "Лекции о кватернионах" [18], опубликованной в 1853 г., формулирует и доказывает замечательную теорему, которая в классической механике ныне называется теоремой о телесном угле. На страницах 339 и 340 этого издания приведена статья 355, в которой дана формулировка теоремы, воспроизводимая здесь полностью, включая даже особенности типографского набора, которые демонстрируют мастерство автора в том, чтобы сделать ее максимально понятной.

355. ... And on *physical* or rather *geometrical* side, so far as regards the general theory of *compositions of rotations*, we arrive (in the plan of recent articles) at this remarkable theorem, that the *infinitely many infinitesimal and conical* ROTATIONS (*themselves* now, and not their halves) of the PERIMETER of ANY *closed figure on a sphere, compound themselves into a* SINGLE *resultant and finite rotation, represented by the* TOTAL AREA *of figure*; it being still understood that elements of this area may become negative [1].

Доказательство этой теоремы вытекает из всей теории умножения кватернионов, о которой идет речь и которой посвящена лекция VI, изложенная на 140 страницах трактата. В этом, видимо, и состоит причина малой известности теоремы. Эту теорему упоминает Гораций Лэмб в своей книге по механике [19], где кратко излагается история открытия и доказательство теоремы.

Последовательность событий, приведших к формулировке и доказательству теоремы, такова. Чтобы понять и доказать факт поворота твердого тела вокруг оси, описавшей на единичной сфере замкнутую непересекающуюся кривую, необходимо, во-первых, знание *теоремы Леонарда Эйлера* (1707 – 1783), доказанной в 1765 г., о том, что твердое тело может быть переведено из заданной начальной ориентации в заданную конечную поворотом вокруг неподвижной оси [20], и, во-вторых, знание *формулы Карла Фридриха Гаусса* (1777 – 1855) о сумме углов сферического многоугольника [21]. Первой решенной на пути к цели задачей была задача о сложении двух конечных поворотов. Приоритет в ее решении принадлежит Олинду Родригу (Родригесу; 1794 – 1854), который в статье 1840 г. [22] показал, что два конечных поворота твердого тела некоммутативны. Заслуга Гамильтона состоит в том, что он предложил для решения этой задачи кватернионы (1853 г.).

Согласно Лэмбу [19] М.Дж. Донкин (профессор астрономии в Оксфорде с 1842 г. по 1869 г.) в 1851 г. дал следующее простое решение задачи сложения двух конечных поворотов. Пусть в результате первого поворота точка пересечения оси тела с единичной сферой описывает дугу большого круга AB, а в результате второго поворота — дугу BC. Донкин доказал, что конечный поворот, равный этим двум, происходит вокруг оси, которая перпендикулярна плоскости, проходящей через неподвижную точку O и середины X и Y дуг AB и BC соответственно, и угол поворота равен дуге большого круга, соединяющей точки X и Y.

Вторая задача на пути к теореме о телесном угле — это задача суммирования трех конечных поворотов твердого тела. Гамильтон доказал, что в результате последовательности из трех поворотов твердого тела, таких, что точка пересечения связанной с телом оси и единичной сферы описывает замкнутый треугольник, тело оказывается повернутым вокруг этой оси на угол, равный сферическому избытку суммы углов сферического треугольника, составленного из дуг больших кругов единичной сферы. Согласно теореме Гаусса [21], этот сферический избыток равен площади сферического треугольника, отнесенной к площади сферы, или телесному углу, под которым треугольник виден из центра сферы. Отметим, что эта теорема Гаусса справедлива и для сферических многоугольников с любым числом сторон.

Теорему Гаусса Гамильтон, несомненно, знал, поскольку окончательную формулировку своей теоремы он получает переходом к пределу при числе сторон сферического многоугольника, стремящемся к бесконечности.

Интересно отметить, что, согласно Лэмбу [19], Ганкель [2] в 1847 г. фактически дал весьма простое доказательство теоремы, которая эквивалентна теореме о телесном угле. Он показал, что если в результате трех последовательных вращений на сфере точка возвращается в исходное положение, то угол равносильного результирующего поворота равен сферическому избытку сферического треугольника, образованного тремя дугами, соответствующими рассматриваемым поворотам. Из того, что изложено по данному вопросу у Лэмба [19], нельзя прийти к однозначному заключению, придавал Ганкель данной теореме исключительно геометрический или же и кинематический смысл. Таким образом, до тех пор, пока работа Ганкеля не будет найдена, нельзя со всей определенностью сделать вывод о том, опередил ли Ганкель Гамильтона. Здесь решающую роль играет вопрос о том, сделал ли Ганкель соответствующие физические выводы из полученных им математических результатов, т.е. рассмотрел ли он соответствующие особенности кинематики твердого тела.

[1] В переводе эта теорема формулируется следующим образом.

"... С *физической* или скорее *геометрической* точки зрения применительно к общей теории *композиции вращений* мы приходим (в плане последних статей) к замечательной теореме, что *бесконечно много бесконечно малых и конических* ВРАЩЕНИЙ (*самих по себе*, а не их половин), образующих ПЕРИМЕТР ПРОИЗВОЛЬНОЙ *замкнутой фигуры на сфере, объединяются в* ЕДИНОЕ *результирующее и конечное вращение, представляемое* ПОЛНОЙ ПЛОЩАДЬЮ *фигуры*; следует понимать, что элементы этой площади могут быть отрицательными."

[2] К сожалению, Лэмб не привел ни ссылок на соответствующую работу, ни даже инициалов Ганкеля, вследствие чего не ясно, о каком именно из Ганкелей идет речь: о Вильгельме (1814 – 1899), немецком физике, профессоре Лейпцигского университета, или о его сыне Германе (1839 – 1873), известном математике, профессоре Тюбингенского университета.

Однако в последующие годы XX столетия теорема о телесном угле была забыта, и ей было суждено быть "переоткрытой" несколько раз по крайней мере в трех различных областях (оптике, квантовой механике и классической механике). Эти три различные области объединяет еще одно открытие Гамильтона — оптико-механическая аналогия, которое он сделал в 1828 – 1837 гг. [24]

3. Задача Феликса Клейна (1849 – 1925)

Существо открытой Гамильтоном аналогии состоит в том, что группа преобразований движения консервативной системы и группа распространения света по волновой теории Христиана Гюйгенса (1629 – 1695) являются группами касательных или канонических преобразований [25]. Огюст Коши (1789 – 1857), поставивший целью развитие оптико-механической аналогии Гамильтона, нашел эту аналогию, но не в динамике механических систем, а в области колебаний упругой среды. Тем самым Коши увел из аналитической динамики вопросы о дальнейшем развитии аналогии с послегюйгенсовскими теориями света. На это обратил внимание Феликс Клейн (1849 – 1925) [26]. "Второе дыхание" задача развития оптико-механической аналогии в рамках аналитической динамики обрела в работах [27, 28] Н.Г. Четаева (1902 – 1959), который назвал эту задачу задачей Клейна. В этих работах задача Клейна была решена, и была выявлена глубокая связь между механикой консервативных систем и геометрической оптикой. В связи с этим стоит еще раз вернуться к работам, посвященным топологической фазе в оптике.

4. Работы С.М. Рытова (1908 – 1996) и В.В. Владимирского (р. 1915)

Пусть поляризованный световой луч распространяется по неплоской траектории. Свяжем с этой траекторией естественный сопровождающий трехгранник Френе [3], составленный единичными векторами касательной, нормали и бинормали к криволинейной траектории луча. В работах Рытова 1938 – 1940 гг. [11, 12] показано, что плоскость поляризации луча вращается относительно трехгранника Френе. Этот результат был развит Владимирским, руководителем дипломной работы которого был Рытов. В работе 1941 г. [13] Владимирский установил, что при возвращении касательной к траектории в исходное состояние в некоторой точке траектории плоскость поляризации света в общем случае будет отличаться от исходной. Это явление не наблюдается, если траектория луча — плоская кривая, а состояние его поляризации неизменно. Более того, если в результате циклической пространственной эволюции трехгранник Френе возвращается в исходное положение, то величина угла поворота плоскости поляризации света относительно исходного численно равна площади на поверхности сферы единичного радиуса, которая заключена внутри замкнутой кривой, описанной на сфере одним из векторов трехгранника (касательной) в процессе эволюции. Аналогия между поворотом плоскости поляризации света и поворотом твердого тела не осталась незамеченной. Она раскрыта в работах И.С. Емельяновой [29 – 31].

5. Работы В. Паули (1900 – 1958) и А.Д. Галанина (1916 – 2000)

Связь между волновым уравнением Дирака для электрона и геометрической оптикой стала объектом исследования в работе Вольфганга Паули [32], опубликованной в 1932 г. Исходя из аналогии между классической механикой и геометрической оптикой, согласно которой лучи в геометрической оптике, соответствующие квантовомеханической задаче, и траектории связанной с ней задачи классической механики полностью совпадают, Паули перенес метод разложения решения уравнения Шрёдингера по степеням отношения постоянной Планка к мнимой единице на случай релятивистского волнового уравнения Дирака для элементарных частиц (электрона и протона), находящихся в заданном внешнем электромагнитном поле. Было показано, что если пренебречь спином электрона, то классические траектории, возникающие в результате предельного перехода, аналогичного переходу от волновой оптики к геометрической, полностью совпадают с траекториями точечного электрона с зарядом в релятивистской механике. Рассматривая влияние спина электрона, Паули считал, что оно проявляется в более высоких приближениях. Он пишет: "Что касается эффектов, связанных с наличием спина, и их влияния на распределение плотности и тока, то они вместе с дифракционными эффектами впервые скажутся на амплитудах ... следующего приближения, на вычислениях которых мы не будем останавливаться сколько-нибудь подробно".

Исследование свойств спина электронов и мезонов в классическом приближении было выполнено аспирантом И.Е. Тамма А.Д. Галаниным в 1942 г. [33]. Исходным положением его подхода к решению задачи было положение о том, что переход от волнового уравнения к уравнению геометрического приближения может быть выполнен методом разложения по степеням малого параметра и его применением к уравнениям Максвелла, Шрёдингера, Дирака и Прока. При этом в нулевом приближении получаются уравнения геометрической оптики (в случае уравнений Максвелла) или уравнения Гамильтона – Якоби классической механики. Из уравнений первого приближения следуют уравнения сохранения (энергии или заряда). Однако если привлечь результаты Рытова [11], показавшие, что из уравнений Максвелла в первом приближении можно найти изменение состояния поляризации волнового поля вдоль траектории луча, и применить их к уравнению Дирака, то в первом приближении можно определить изменение ориентации спина электрона при его движении по классическому пути. Выполняя эту программу, Галанин вывел уравнения, описывающие прецессию спина электрона и мезона, и в конечном счете пришел к выражению для прецессии Томаса [34, 35]. Подводя итог проведенному исследованию, Галанин пишет: "... при малых скоростях движения электрон и мезон проявляют свои гироскопические свойства как классические вращающиеся частицы".

[3] *Трехгранник Френе* — это естественный сопровождающий трехгранник, связанный с пространственной кривой. Предложен Жаном Фредериком Френе (1816 – 1900). Теория таких трехгранников развита Гастоном Дарбу (1842 – 1917), поэтому иногда сопровождающие трехгранники называют *трехгранниками Дарбу*.

6. Работы А.Ю. Ишлинского (1913 – 2003)

В 1944 г. А.Ю. Ишлинским была опубликована важная работа [36], которая, однако, долгое время оставалась малоизвестной. В ней выявлен эффект влияния бортовой и килевой качки на изменение курса корабля. В [36] показано, что в самом общем случае, когда бортовая качка и килевая качка имеют сдвиг по фазе, любая ось, связанная с кораблем, совершает коническое движение, что приводит к изменению угловой ориентации корабля и, как следствие, его курса.

В 1949 г. теорема о телесном угле получила неожиданное экспериментальное подтверждение в ходе испытаний по проверке уходов одноосного гиростабилизатора на качающемся основании, которые проводил инженер М.Л. Еффа [4]. Программой испытаний предусматривалось измерение уходов прибора при воздействии качки относительно двух взаимно ортогональных осей с отношением частот качек 2:1. При этом соотношении конец оси стабилизации гироприбора описывал на поверхности сферы замкнутую восьмерку, и, согласно теореме Гамильтона, такое возмущение не приводило к формированию ухода. Наблюдаемые уходы были относительно невелики и порождались только несовершенством объекта испытаний. Однако в одном из испытаний регламент не был соблюден, и прибор подвергался качке вокруг двух осей с одинаковыми частотами. Вследствие несинфазности колебаний ось стабилизации описывала эллиптический конус, и в результате видимый уход возрос почти на два порядка величины. Этот факт был замечен испытателем и сообщен А.Ю. Ишлинскому, который дал ему краткое, но исчерпывающее объяснение [5].

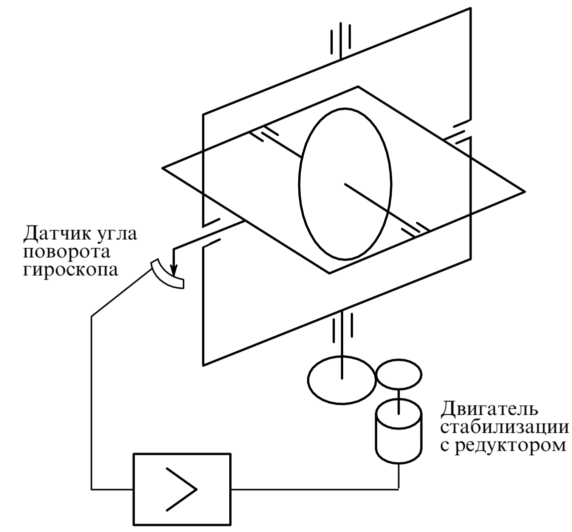

Рис. 1. Схема одноосного гиростабилизатора. На вращение наружной рамы гироскоп, представленный в виде рамки и ротора, реагирует поворотом относительно внутренней оси. Угол поворота измеряется датчиком угла, сигнал которого поступает на усилитель обратной связи и преобразуется в ток двигателя стабилизации. Двигатель стабилизации компенсирует возмущающие моменты на оси рамы гиростабилизатора, в результате чего проекция абсолютной угловой скорости рамы на ее ось сводится к нулю.

Схема одноосного гиростабилизатора, подвергавшегося испытаниям, показана на рис. 1. В своей основе он представляет собой гироскоп в кардановом подвесе (рис. 2), именно такой, какой Жан Бернар Леон Фуко (1819 – 1868) предложил 27 сентября 1852 г. Парижской академии наук в качестве прибора, предназначенного для экспериментального доказательства вращения Земли [40]. Известно, что проведенный Фуко эксперимент не удался по причине несовершенства прибора. Одноосный гиростабилизатор — это прибор, в котором технические недостатки, не позволившие Фуко реализовать его идею, устранены.

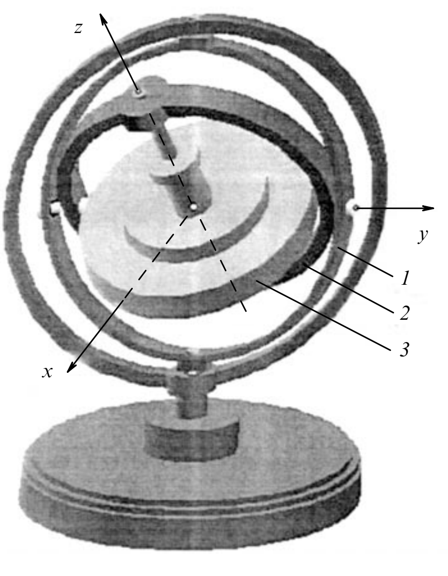

Рис. 2. Гироскоп в кардановом подвесе, предложенный Леоном Фуко. Прибор состоит из ротора (*3*), внутреннего (*2*) и наружного (*1*) колец. Система координат xyz связана с внутренним кольцом подвеса.

Если ротор гироскопа, показанного на рис. 2, привести в быстрое вращение относительно его оси и предоставить системе возможность свободно двигаться, то сразу обнаружится, что эксперимент Фуко не удался из-за влияния трения в подшипниках ротора и колец карданова подвеса. Чтобы преодолеть вредное влияние трения в подшипниках ротора, на внутреннем кольце устанавливают статор электрического двигателя, поддерживающего постоянную угловую скорость Ω вращения ротора относительно статора или внутреннего кольца карданова подвеса. В результате ротор приобретает собственный кинетический (угловой) момент H, равный произведению полярного момента инерции ротора J на угловую скорость Ω. Микроскопическим аналогом собственного кинетического момента гироскопа служит спин элементарных частиц.

Уравнения вращения гироскопа как твердого тела, имеющего постоянный, поддерживаемый электрическим

[4] Еффа Марк Леопольдович (1925 – 1994) — доктор технических наук, лауреат Ленинской премии, инженер и ученый, создатель гироскопов для ракетно-космической техники.

[5] Этот научный результат был опубликован в монографии [37], вышедшей в 1952 г. относительно небольшим тиражом и доступной узкому кругу специалистов, но А.Ю. Ишлинский включил его в курс лекций "Теория гироскопов", который один из авторов (С.А. Харламов) слушал в МГУ в 1956 г. Только в 1963 г. второе, дополненное издание этой монографии А.Ю. Ишлинского [38] вышло широким тиражом. Впоследствии данный результат был включен в учебник для вузов [39].

двигателем спин, записываются в виде

$$
\begin{aligned}
& A\,\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t} + (C-B)\,\omega_y\omega_z + \omega_y H = M_x\,, \\
& B\,\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t} + (A-C)\,\omega_z\omega_x - \omega_x H = M_y\,, \\
& C\,\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} + (B-A)\,\omega_x\omega_y = M_z\,,
\end{aligned} \tag{1}
$$

где A, B, C — моменты инерции гироскопа относительно осей координат xyz, связанных с гироскопом так, как показано на рис. 2; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции вектора угловой скорости гироскопа и M_x, M_y, M_z — проекции приложенного к нему результирующего момента на те же оси. При составлении этих уравнений предполагается (и в практике разработки гироскопов к этому стремятся), что оси системы координат x, y, z являются главными центральными осями инерции гироскопа. Эти уравнения отличаются от классических уравнений Эйлера [20]

$$
\begin{aligned}
& A\,\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t} + (C-B)\,\omega_y\omega_z = M_x\,, \\
& B\,\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t} + (A-C)\,\omega_z\omega_x = M_y\,, \\
& C\,\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} + (B-A)\,\omega_x\omega_y = M_z
\end{aligned} \tag{2}
$$

членами, пропорциональными спину гироскопа H. Уравнения (1) составлены российским ученым Б.В. Булгаковым (1900–1952) [41], а идея представления уравнений гироскопа в подобной форме принадлежит А.Н. Крылову (1863–1945) и Ю.А. Круткову (1890–1952) [42].

Гироскоп, установленный на подшипниках внутренней оси y внутри внешнего кольца (см. рис. 1), образует вместе с этим кольцом одногироскопную раму. Такая конструкция является базовой для создания гироскопических приборов типа свободного гироскопа и одноосного гиростабилизатора. Такие приборы служат для определения вращения ракет, самолетов, кораблей и других движущихся в пространстве объектов. Поскольку угловые скорости вращения этих объектов малы, члены эйлеровой части в уравнениях вращения (1) обычно много меньше членов, пропорциональных спину гироскопа, и ими пренебрегают. В результате получаются уравнения

$$
\omega_y H = M_x, \quad -\omega_x H = M_y\,, \tag{3}
$$

описывающие закон прецессии гироскопа. Как можно усмотреть из рис. 1, моменты, действующие на гироскоп вокруг оси z, уравновешиваются реакциями опор внутренней и внешней осей его подвеса.

Если одногироскопную раму установить на некотором подвижном объекте так, что ее внешняя ось горизонтальна, а внутренняя вертикальна, и принять меры к снижению вредных моментов на этих осях (порождаемых трением и другими источниками различной физической природы), то из уравнений (1) следует, что

$$
\omega_x = 0\,, \qquad \omega_y = 0\,.
$$

Эти равенства показывают, что оси x и y не вращаются, и такой прибор можно использовать для выработки команд о вращении для системы управления ориентацией объекта [6].

Если попытаться повернуть внешнее кольцо карданова подвеса гироскопа Фуко с быстро вращающимся ротором, то согласно закону прецессии (3) ротор будет поворачиваться вокруг внутренней оси, стремясь совместить вектор кинетического момента с осью внешнего кольца карданова подвеса. Это свойство использовано для борьбы с трением в подшипниках оси внешнего кольца карданова подвеса. На этой оси устанавливают ротор показанного на рис. 1 двигателя (двигателя стабилизации), задача которого — уравновесить трение в подшипниках и другие возмущающие моменты. Уравновешивающий момент создается при помощи командного сигнала, пропорционального углу поворота ротора вокруг оси внутреннего кольца карданова подвеса, который воспринимается измерительным устройством — датчиком угла [7]. Для этого прибора уравнения закона прецессии (1) имеют вид

$$
\omega_y H = M_x^{(1)} + M_x^{(2)}\,, \quad -\omega_x H = M_y\,, \tag{4}
$$

где $M_x^{(1)}$ — суммарный возмущающий момент, $M_x^{(2)}$ — момент стабилизации, а момент M_y можно считать пренебрежимо малым, если принять во внимание меры по повышению технического совершенства прибора. Сумма моментов в первом уравнении равна нулю в силу принципа функционирования одноосного гиростабилизатора. Из второго уравнения следует, что угловая скорость вращения одногироскопной рамы вокруг ее оси равна нулю. Эта угловая скорость равна

$$
\omega_x = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\sin\theta\,, \tag{5}
$$

где α — угол поворота рамы относительно ее оси, ψ и θ — углы поворота основания в процессе движения точки C конца единичного вектора оси рамы на единичной сфере, показанные на рис. 3 (угол α не показан, чтобы не усложнять рисунок). Представляя формулу (5) в дифференциальной форме и производя интегрирование, убеждаемся в том, что изменение угла поворота рамы гиростабилизатора при движении точки по замкнутому контуру (см. рис. 3) определяется криволинейным интегралом

$$
\alpha - \alpha_0 = -\oint_L \sin\theta\,\mathrm{d}\psi\,. \tag{6}
$$

Применяя к этому интегралу формулу Стокса, преобразуем его в двойной интеграл по поверхности, ограниченной замкнутым контуром:

$$
\alpha - \alpha_0 = \int\!\!\int_S \cos\theta\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\theta\,. \tag{7}
$$

---

[6] Такого типа приборы были применены на немецкой ракете А-4, разработанной в 1940-е годы. Они еще не могли "видеть" вращение Земли, но были способны удержать ракету на заданном курсе. Благодаря различным инженерным ухищрениям приборы этого типа были доведены до такой степени совершенства, что прекрасно "видели" вращение Земли.

[7] Для борьбы с трением в подшипниках внутреннего кольца карданова подвеса также применяются разные технические решения, но они не имеют прямого отношения к теме.

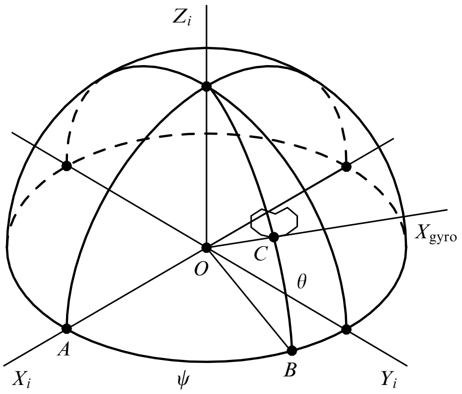

Рис. 3. Единичная сфера, связанная с инерциальной системой координат $X_iY_iZ_i$. Ось $X_{\rm gyro}$ гиростабилизатора, показанного на рис. 1, описывает на сфере замкнутую кривую. Ориентация оси гиростабилизатора определяется углами $AOB = \psi$ и $BOC = \theta$. Точка C есть след оси гиростабилизатора на единичной сфере.

Подынтегральное выражение представляет собой элемент $\mathrm{d}S$ площади единичной сферы. Следовательно,

$$\alpha - \alpha_0 = S\,. \tag{8}$$

По определению поверхность S на единичной сфере является мерой телесного угла, ограниченного замкнутой конической поверхностью. Итак, угол поворота рамы одноосного гиростабилизатора вокруг ее оси равен телесному углу, описанному этой осью в процессе циклического движения основания [8]. Как было отмечено выше, важное следствие этого результата было опубликовано А.Ю. Ишлинским в работе [36], опубликованной в 1944 г. В ней на основании анализа геометрии бикарданова подвеса [44] с применением аппарата таблиц направляющих косинусов выявлен эффект влияния бортовой и килевой качки на изменение показаний курса при качке корабля вокруг произвольно ориентированной оси. Основной результат — это демонстрация важности влияния нелинейных (квадратичных) эффектов в анализе малых угловых колебаний на кинематику вращения систем твердых тел.

Как показано А.Ю. Ишлинским [37, 38], рассмотренный эффект тесно связан с параллельным перенесением вектора в римановой геометрии [45, 46]. Так, если осуществить параллельный перенос вектора вдоль замкнутой кривой на поверхности сферы, то по возвращении в исходную точку вектор окажется повернутым на угол, численно равный телесному углу, на который опирается кривая. Такое явление иногда именуется *неголономией* (см., например, [4, 6, 47]), т.е. в общем случае параллельного переноса вектора (или оси, связанной с твердым телом) его конечное угловое положение неголономным (неинтегрируемым) образом связано с его начальным угловым положением и координатами начала и конца пути (в частности, для случая замкнутого пути эти координаты совпадают), поскольку оно определяется координатами каждой точки пути, по которой перенесли вектор. Отметим, что формализм параллельного переноса вектора использовал В.В. Владимирский [13].

[8] В монографии [43] А.Ю. Ишлинский отмечает, что результат (8) был установлен им в 1943 г. и впервые опубликован в монографии [37] (второе издание [38]).

7. Работа Г. Хайнриха

К работам А.Ю. Ишлинского тесно примыкает в идейном плане работа австрийского исследователя Г. Хайнриха [48] (1950 г.), в которой он рассмотрел влияние конической качки корабля, возникающей при бортовой и килевой качках со сдвигом по фазе, на показания однороторных гирокомпасов. Автором исследован гирокомпас, представляющий по существу гироскоп в кардановом подвесе (см. рис. 2), внешняя ось которого вертикальна, а направление спина гироскопа удерживается в плоскости горизонта системой регулирования по показаниям уровня, установленного на корпусе гироскопа. Показано, что гирокомпасы также имеют порождаемые коническими колебаниями основания ошибки, но, в отличие от одноосного гиростабилизатора, у которого угол поворота рамы не ограничен, эти ошибки ограничены, поскольку гирокомпас имеет направляющий момент, удерживающий направление оси вращения ротора гироскопа вблизи направления на Север. Изложение результатов этой работы приводится в монографии К. Магнуса [49], в которой представлены также результаты работы Х.Л. Прайса [50, 51] (1948 г.), исследовавшего ошибки гироскопа направления при вираже самолета, когда ось, перпендикулярная продольной оси (оси фюзеляжа) и поперечной оси (ось крыльев), описывает конус в пространстве.

8. Работа Л.Е. Гудмана и А.Р. Робинсона

В 1958 г. Л.Е. Гудман и А.Р. Робинсон публикуют работу [52], в которой они независимо воспроизвели изложенные выше результаты А.Ю. Ишлинского в виде обобщенной теоремы кинематики конечных вращений. Обобщение фактически сводилось к тому, что авторы рассмотрели влияние конического движения оси вращающегося твердого тела (рамы гироскопического прибора) и показали, что непрерывное коническое движение дает приращение угловой скорости. Эта работа приобрела большую известность на западе и породила бум среди исследователей гироскопических приборов. В течение короткого времени было опубликовано много работ теоретического и экспериментального характера, посвященных влиянию угловых вибраций на показания гироскопов и гироскопических приборов.

9. Работа Дж. Ханнея

Работу Дж. Ханнея [17] следует рассмотреть более детально, чтобы оценить вклад ее автора в развитие современных представлений о топологической фазе в классической механике. В этой работе автор поставил перед собой цель распространить полученный М. Берри [1] результат в квантовой механике на полуклассический случай ($h \to 0$) и рассмотрел интегрируемую механическую систему с одной степенью свободы, функция Гамильтона которой зависит от параметров. Механическая система при постоянных значениях параметров, т.е. в любой точке пространства параметров, интегрируема. Для этой системы в качестве канонических переменных выбираются переменные "действие – угол", и переменная "действие" дает первый интеграл системы.

Исходя из представлений об адиабатических инвариантах, почерпнутых из книги В.И. Арнольда [54], Дж. Ханней исследует поведение системы в случае, когда параметры функции Гамильтона меняются медленно вдоль некоторой замкнутой траектории в пространстве параметров. В этом случае переменная "действие" механической системы представляет собой адиабатический инвариант, о чем задолго до Дж. Ханнея и В.И. Арнольда писали А.А. Андронов, Л.И. Мандельштам и М.А. Леонтович в работе [55]. К сожалению, эта публикация, содержащая четкие определения стационарного и временнóго адиабатических инвариантов, выпала из поля зрения последующих поколений ученых.

Главный научный результат Дж. Ханнея заключается в том, что при медленном изменении параметров функции Гамильтона вдоль замкнутой траектории в пространстве параметров фазовая каноническая переменная "угол" приобретает дополнительное приращение, которое зависит от этой замкнутой траектории. Именно это приращение и было впоследствии названо М. Берри и Дж. Ханнеем [53] топологической фазой в классической механике. Благодаря высокому научному авторитету М. Берри мнение о том, что Дж. Ханней является первооткрывателем топологической фазы в классической механике, стало распространенным не только среди западных ученых.

Помимо теоретических рассуждений в работе Дж. Ханнея приведены три примера, предназначенные для подтверждения значимости выводов автора. В первом примере рассматривается движение без трения бусины, нанизанной на замкнутый проволочный контур. Исследуемый эффект проявляется в этой системе, если проволочный контур вращается относительно нормали к его плоскости. Для этой системы показано, что средняя угловая скорость вращения радиус-вектора, проходящего через бусину, изменяется на величину угловой скорости вращения контура. Результат тривиален и может быть легко получен на основе теоремы об изменении момента количества движения из теоретической механики.

Во втором примере рассматривается гармонический осциллятор, функция Гамильтона которого взята в наиболее сложной форме. Для этого осциллятора переменная "действие", равная отношению полной энергии осциллятора к его частоте, есть адиабатический инвариант системы, что было показано еще в 1928 г. советскими физиками [55]. Тот факт, что переменная "угол" может иметь дополнительное приращение при изменении параметров осциллятора, может быть установлен из формул работы [55].

В качестве третьего примера указано на изменение угла поворота вращающегося волчка при коническом движении его оси собственного вращения. В этом примере резюмируются результаты работы 1958 г. Л.Е. Гудмана и А.Р. Робинсона [52]. Никаких аргументов в пользу того, что эти результаты имеют отношение к теоретическим результатам Дж. Ханнея, не приводится.

10. Развитие, обобщение и применения теоремы о телесном угле

10.1. Дальнейшие применения теоремы о телесном угле в классической механике

В последние годы XX века работы, связанные с топологической фазой в механике, продолжались. В работах Ю.К. Жбанова и В.Ф. Журавлева [56–58] предприняты попытки уточнить формулировку теоремы о телесном угле (в частности, рассмотрен процесс накопления этого угла в процессе конического движения оси твердого тела, когда этот конус не замкнут), упростить и сделать наглядным ее доказательство. Проанализирована связь теоремы о телесном угле с некоммутативностью конечных вращений твердого тела. Наиболее полное представление о некоммутативности вращений и ее роли в навигации содержится в работе Н.И. Кробка [59].

В работе С.Е. Переляева [60] решается вопрос о существовании эффекта, аналогичного эффекту Ишлинского, в пространствах большего числа измерений. Показано, что этот эффект свойствен только трехмерному пространству и не наблюдается в четырехмерном пространстве. По представлению автора, эффект порождается тем, что число параметров, определяющих группу вращения SO(3), равно размерности пространства. В работе А.В. Крутова [61] обстоятельно исследованы геометрические аспекты пространственного вращения твердого тела.

Среди работ, посвященных рассматриваемой проблеме, представляет особый интерес работа [62] индийских ученых (Р. Саймон, Н. Мукунда, Е.С.Г. Сударшан), в которой теория поворотов Гамильтона [18] обобщается с применением теории групп. Авторы показали, что повороты, определенные Гамильтоном как ориентированные дуги больших кругов на единичной сфере, эквивалентны элементам группы SU(2). По аналогии они ввели ориентированные дуги на единичном однополостном гиперболоиде и продемонстрировали их эквивалентность элементам группы Sp(2, R).

Что касается развития исследований М. Берри и Дж. Ханнея, то существенным продвижением и обобщением фазы Берри стало устранение адиабатического приближения в работе Я. Ааронова и Дж. Анандана [63]. Однако это обобщение дается достаточно дорогой ценой, поскольку квантовые состояния не всегда возвращаются в исходное состояние после циклической эволюции гамильтониана. По этой причине геометрическую фазу не всегда можно определить методом работы [63]. Классическим аналогом геометрической фазы является угол Ханнея. Его исследованию применительно к гармоническому осциллятору с периодическим гамильтонианом посвящена работа Д.-Ю. Сонга [64]. В ней исследуется вопрос о существовании угла Ханнея в фазовом пространстве осциллятора, каноническая структура которого такова, что переменная действия есть точный (а не адиабатический) инвариант гамильтоновой системы.

10.2. Дальнейшие применения теоремы о телесном угле в поляризационной оптике и развитие оптико-механической аналогии

Результаты, полученные С.М. Рытовым и В.В. Владимирским в геометрической оптике [11–13], фактически получили дальнейшее развитие в области поляризационной оптики. В 1956 г. С. Панчаратнам показал [14, 15], что если световой луч распространяется по плоской траектории (в частности, по прямой) и при этом его состояние поляризации испытывает циклическую эволюцию, так что точка, отображающая его состояние поляризации на сфере Пуанкаре [9], описывает замкнутую кривую, то он приобретает дополнительный набег фазы, численно равный телесному углу, который описал радиус-вектор, исходящий из центра сферы и опирающийся на рассматриваемую замкнутую кривую. Как показано в работе Г.Б. Малыкина и Ю.И. Неймарка [65], фаза Панчаратнама света, прошедшего одномодовый волоконный световод (ОВС), неголономным образом связана с угловым положением азимутов осей линейного двулучепреломления ОВС на входе и выходе световода, что является проявлением оптико-механической аналогии. Применения фазы Панчаратнама рассмотрены в обзорах [3–9].

В работах одного из авторов (Г.Б. Малыкина) [66, 67] было показано, что хорошо известное явление поляризационной невзаимности (ПН) волоконных кольцевых интерферометров (ВКИ) [69, 70], которое приводит к возникновению не связанной с вращением разности фаз встречных волн, также может быть представлено как невзаимная геометрическая (топологическая) фаза. Как показано в [66, 67], обусловленная ПН разность фаз встречных волн ВКИ [9] численно равна телесному углу, который опирается на сферический треугольник, заданный тремя точками на сфере Пуанкаре: точкой, соответствующей состоянию поляризации света на входе ВКИ, и точками, соответствующими состоянию поляризации света на обоих выходах ВКИ.

Отметим, что несмотря на то, что и невзаимная геометрическая фаза ВКИ, и фаза Панчаратнама определяются через телесный угол на сфере Пуанкаре, они не могут быть сведены одна к другой: первая существует только для встречных волн в кольце, вторая же может иметь место и для одной волны; первая определяется исключительно состояниями поляризации на входе и на выходах кольца, вторая зависит от эволюции состояния поляризации вдоль всей трассы луча. Из последнего следует, что, в отличие от фазы Панчаратнама, невзаимная геометрическая фаза ВКИ голономным образом связана с состоянием поляризации на входе и обоих выходах ВКИ.

Следует отметить также одно принципиальное различие между фазой Рытова – Владимирского, с одной стороны, и фазой Панчаратнама и невзаимной геометрической фазой — с другой: в первом случае рассматривается телесный угол в реальном пространстве, во втором — на сфере Пуанкаре, т.е. в пространстве векторов Стокса [9, 71].

Эффект, рассмотренный А.Ю. Ишлинским [37, 38], приводит к появлению ошибок в показаниях механических гироскопов — датчиков углового положения, принцип действия которых основан на свойстве инерции материальных тел. Невзаимная же геометрическая фаза в ВКИ приводит к появлению ошибок в показаниях волоконных оптических гироскопов — датчиков угловой скорости вращения [70], принцип действия которых основан на использовании эффекта Саньяка (эффект СТО) [70, 72–75]. Таким образом, теорема о телесном угле находит применение для вычисления ошибок как механических, так и оптических гироскопов, в чем проявляется оптико-механическая аналогия.

[9] Расчет проводился раздельно для волн, прошедших по медленной и быстрой осям двулучепреломления ОВС.

11. Теорема о телесном угле в специальной теории относительности

Довольно неожиданным и, с точки зрения физики, наиболее интересным из следствий рассмотренной выше теоремы о телесном угле оказалось ее применение в специальной теории относительности. В работах [77–79] показано, что аналогичное этой классической теореме соотношение имеет место и в специальной теории относительности: угол поворота, приобретаемый твердым телом в процессе его движения по плоской криволинейной траектории и обусловленный прецессией Томаса (релятивистским кинематическим эффектом) [34, 35, 80], численно равен наблюдаемому в неподвижной системе отсчета телесному углу, который описала связанная с телом ось вследствие изменения поворота изображения твердого тела в неподвижной системе отсчета. Последнее явление именуется релятивистской аберрацией [81–84] и вызвано лоренцевским сокращением длины и запаздыванием света, испущенного различными участками тела. Таким образом, прецессию Томаса можно рассматривать как релятивистский аналог эффекта Ишлинского или теоремы о телесном угле.

Отметим, что даже для наиболее простого случая кругового движения получение адекватного аналитического выражения для связи величины угловой скорости томасовской прецессии с угловой скоростью орбитального вращения является довольно непростой задачей. Как показано в работах [85], для этого случая различные авторы получают различные выражения. Всего известно около десяти существенно отличающихся друг от друга выражений, причем некоторые из них встречаются в нескольких вариантах — с различными знаками и коэффициентами. Предложенный нами метод расчета выражения для прецессии Томаса, основанный на применении теоремы о телесном угле [77–79], позволяет с помощью несложных тригонометрических преобразований, т.е. существенно проще по сравнению с другими известными методами, получить корректный результат и в то же время наглядно проиллюстрировать физический смысл этого явления.

12. Заключение

В решении проблемы топологической фазы в механике можно выделить три этапа, или три волны интереса. На первом этапе сэр Уильям Роуэн Гамильтон создает теорию поворотов твердого тела, опираясь на результаты предшественников как объект для применения его теории кватернионов. Он формулирует и доказывает (в 1853 г.) теорему, которую ныне называют *теоремой о телесном угле*. Она включается в классический трактат Г. Лэмба на рубеже двух столетий, но затем забывается на полвека.

На втором этапе, в начале 1940-х годов, эта теорема формулируется и доказывается А.Ю. Ишлинским в более общей постановке применительно к гироскопическим приборам. В конце 1940-х годов теорема обрела экспериментальное подтверждение в результате испытаний одноосного гиростабилизатора на качающемся основании. В 1952 г. А.Ю. Ишлинский уже включает теорему о телесном угле в монографию [37], а в 1956 г. — в курс лекций "Теория гироскопов", в которых продемонстрирован неголономный характер этого эффекта. В

1958 г. эта теорема также была сформулирована и доказана Л.Е. Гудманом и А.Р. Робинсоном применительно к влиянию конечных вращений на гироскопические чувствительные элементы. Эти работы породили поток исследований влияния угловых вибраций на точность гироскопических приборов.

Третий этап — это распространение Дж. Ханнеем введенного М. Берри понятия топологической фазы в квантовой механике на классические гамильтоновы механические системы. На этом этапе было показано, что переменная "угол" интегрируемой механической системы приобретает дополнительное приращение при адиабатическом циклическом изменении гамильтониана в пространстве параметров. Это приращение, названное углом Ханнея, по существу представляет собой угол, определенный Гамильтоном для твердого тела и Ишлинским для гироскопических приборов в реальном трехмерном пространстве, но наблюдаемый в фазовом пространстве интегрируемой гамильтоновой механической системы. Непременным условием существования угла Ханнея является адиабатический характер изменения канонической переменной "действие", или ее точная инвариантность.

Следует особо отметить, что понятие топологической фазы помимо классической механики используется также в оптике и квантовой механике. Примечательно, что российскими учеными С.М. Рытовым и В.В. Владимирским, А.Д. Галаниным, А.Ю. Ишлинским были получены приоритетные результаты по проблеме топологической фазы в оптике, физике элементарных частиц и механике за короткий (1938 – 1952 гг.), но весьма сложный период времени в истории страны. Необходимо подчеркнуть также связь топологической фазы в оптике и механике при помощи оптико-механической аналогии, развитой в работах Н.Г. Четаева.

Авторы выражают искреннюю благодарность всем, кто оказал им поддержку при работе над статьей. Особо признательны авторы А.Ю. Ишлинскому и В.В. Владимирскому за обсуждение истории создания их работ, В.Л. Гинзбургу за обсуждение ряда вопросов, Ю.И. Неймарку за ценные замечания, П.А. Хандохину и П. Глорье (P. Glorieux, Франция) за предоставление копии статьи О. Родрига, Ю.М. Колесову, предоставившему авторам копии статей А.Ю. Ишлинского, Л.А. Мальцевой за предоставление копий статей Г. Хайнриха и Х.Л. Прайса, В.И. Поздняковой за помощь в работе.

Список литературы

1. Berry M V *Proc. R. Soc. London Ser. A* **392** 45 (1984)
2. Simon B *Phys. Rev. Lett.* **51** 2167 (1983)
3. Виницкий С И и др. *УФН* **160** (6) 1 (1990)
4. Berry M *Phys. Today* **43** (12) 34 (1990)
5. Anandan J *Nature* **360** 307 (1992)
6. Клышко Д Н *УФН* **163** (11) 1 (1993)
7. Торонов В Ю, Дербов В Л, Приютова О М *Изв. вузов. Прикл. нелин. динамика* **4** (6) 3 (1996)
8. Боднарчук В И, Давтян Л С, Корнеев Д А *УФН* **166** 185 (1996)
9. Малыкин Г Б *Изв. вузов. Радиофиз.* **40** 265 (1997)
10. Berry M *Nature* **326** 277 (1987)
11. Рытов С М *ДАН СССР* **18** 263 (1938)
12. Рытов С М *Тр. ФИАН* **2** (1) 41 (1940)
13. Владимирский В В *ДАН СССР* **31** 222 (1941)
14. Pancharatnam S *Proc. Ind. Acad. Sci. A* **44** 247 (1956)
15. Pancharatnam S *Proc. Ind. Acad. Sci. A* **44** 398 (1956)
16. Berry M V *J. Mod. Optics* **34** 1400 (1987)
17. Hannay J H *J. Phys. A*: *Math. Gen.* **18** 221 (1985)
18. Hamilton W R *Lectures on Quaternions* (Dublin: Hodges and Smith, 1853) p. 338
19. Лэмб Г *Теоретическая механика* Т. 3 (М. – Л.: ОНТИ, 1936) [Lamb H *Higher Mechanics* (Cambridge: The Univ. Press, 1929)]
20. Euler L *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* (Rostock: Greifswald, 1765)
21. Бураго Ю Д, в кн. *Математическая энциклопедия* Т. 1 (М.: Сов. энциклопедия, 1977) с. 902
22. Rodrigues O *J. Math. Pures Appl.* **5** 380 (1840)
23. Donkin M J *Philos. Mag.* **4** 1 (1851)
24. Hamilton W R *Trans. R. Irish Acad.* **15** 69 (1828); **16** (1) 1 (1830); **16** (2) 93 (1831); **17** (1) 1 (1837) [Гамильтон У Р *Избранные труды* (М.: Наука, 1994) с. 10]
25. Гюйгенс Х *Трактат о свете* (М. – Л.: ОНТИ, 1935) [C.H.D.Z. [10] *Traité de la Lumière* (Leyden, 1690)]
26. Klein F, in *Gesammelte mathematische Abhandlungen* Bd. 2 (Hrsg. R Fricke, H Vermeil) (Berlin: J. Springer, 1922) p. 601
27. Четаев Н Г *ПММ* **22** 487 (1958)
28. Четаев Н Г *ПММ* **24** 23 (1960)
29. Емельянова И С, в сб. *Математическое моделирование и оптимальное управление* (Под ред. С Н Стронгина) (Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1994) с. 90
30. Емельянова И С, Дунаева Н Л, в сб. *Проблемы теории колебаний* (Под ред. Е Ф Сабаева) (Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1995) с. 3
31. Емельянова И С, в сб. *Методы анализа нелинейных систем* (Под ред. С В Емельянова, С К Коровина) (М.: Диалог МГУ, 1997) с. 63
32. Pauli W *Helv. Phys. Acta* **5** 179 (1932) [Паули В *Труды по квантовой механике, статьи 1928 – 1938* (М.: Наука, 1977) с. 112]
33. Galanin A D *J. Phys. USSR* **6** 35 (1942)
34. Thomas L H *Nature* **117** 514 (1926)
35. Thomas L H *Philos. Mag. Ser. 7* **3** (13) 1 (1927)
36. Ишлинский А Ю *Приборостроение. Техн.-произв. бюлл.* (4) 3 (1944)
37. Ишлинский А Ю *Механика специальных гироскопических систем* (Киев: Изд-во АН УССР, 1952)
38. Ишлинский А Ю *Механика гироскопических систем* 2-е изд. (М.: Изд-во АН СССР, 1963)
39. Ишлинский А Ю, Борзов В И, Степаненко Н П *Лекции по теории гироскопов* (М.: Изд-во МГУ, 1983)
40. Foucault L *CR Acad. Sci.* **35** 421 (1852)
41. Булгаков Б В *Прикладная теория гироскопов* (М. – Л.: ГИТТЛ, 1939)
42. Крылов А Н, Крутков Ю А *Общая теория гироскопов* (Л.: Изд-во АН СССР, 1932)
43. Ишлинский А Ю *Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация* (М.: Наука, 1976)
44. Ишлинский А Ю *Приборостроение. Техн.-произв. бюлл.* (1) 12 (1944)
45. Рашевский П К *Риманова геометрия и тензорный анализ* 3-е изд. (М.: Наука, 1967)
46. Лумисте Ю Г, в кн. *Математическая энциклопедия* Т. 4 (М.: Сов. энциклопедия, 1984) с. 206
47. Неймарк Ю И, Фуфаев Н А *Динамика неголономных систем* (М.: Наука, 1967)
48. Heinrich G *Österr. Ing. Arch.* **3** 215 (1950)
49. Магнус К *Гироскоп* (М.: Мир, 1974) [Magnus K *Kreisel* (Berlin: Springer-Verlag, 1971)]
50. Price H L *Aircraft Eng.* **20** (1) 11 (1948)
51. Price H L *Aircraft Eng.* **20** (2) 38 (1948)
52. Goodman L E, Robinson A R *J. Appl. Mech.* **25** 210 (1958) [Гудман Л Е, Робинсон А Р, в сб. *Механика* № 5 (М.: ИЛ, 1959) с. 133]
53. Berry M V, Hannay J H *J. Phys. A*: *Math Gen.* **21** L325 (1988)
54. Арнольд В И *Математические методы классической механики* (М.: Наука, 1979)
55. Андронов А А, Мандельштам Л И, Леонтович М А *Журн. Русск. физ.-хим. общества. Ч. физ.* **60** 413 (1928); Андронов А А

[10] C.H.D.Z. — Christian Huygens de Zuylichem. В то время запись фамилии автора в виде аббревиатуры в заголовке монографии была распространенным явлением.

Собрание трудов (М.: Изд-во АН СССР, 1956) с. 34; Мандельштам Л И *Собрание трудов* Т. 1 (М.: Изд-во АН СССР, 1948) с. 297)
56. Жбанов Ю К, Журавлев В Ф *Изв. АН СССР. Сер. Мех. тв. тела* (1) 9 (1978)
57. Журавлев В Ф *ПММ* **60** 323 (1996)
58. Журавлев В Ф *Основы теоретической механики* (М.: Наука. Физматлит, 1997)
59. Krobka N I, in *Proc. of the 2nd Saint Petersburg Intern. Conf. on Gyroscopic Technology and Navigation* Pt. II (St. Petersburg, 1995) p. 99
60. Переляев С Е, в сб. *Механика и навигация. Материалы научной сессии, посвященной 85-летию академика РАН А.Ю. Ишлинского, Москва, 1998* (Под ред. Ю М Колесова) (Спб.: ГНЦ РФ — ЦНИИ Электроприбор, 1999) с. 88
61. Крутов А В *Изв. вузов. Машиностроение* (4) 13 (2001)
62. Simon R, Mukunda N, Sudarshan E C G *Phys. Rev. Lett.* **62** 1331 (1989)
63. Aharonov Y, Anandan J *Phys. Rev. Lett.* **58** 1593 (1987)
64. Song D-Y *Phys. Rev. Lett.* **85** 1141 (2000)
65. Малыкин Г Б, Неймарк Ю И *Изв. вузов. Радиофиз.* **41** 1125 (1998)
66. Малыкин Г Б *Оптика и спектроск.* **81** 474 (1996)
67. Малыкин Г Б *Оптика и спектроск.* **84** 515 (1998)
68. Андронова И А, Геликонов Г В, Малыкин Г *Квантовая электрон.* **26** 271 (1999)
69. Andronova I A, Gelikonov G V, Malykin G B *Proc. SPIE* **3736** 423 (1999)
70. Андронова И А, Малыкин Г Б *УФН* **172** 849 (2002)
71. Шерклифф У *Поляризованный свет* (М.: Мир, 1965) [Shurcliff W A *Polarized Light* (Cambridge, Mass.: Harvard Univ. Press, 1962)]
72. Логунов А А, Чугреев Ю В *УФН* **156** 137 (1988)
73. Малыкин Г Б *УФН* **167** 337 (1997)
74. Вугальтер Г А, Малыкин Г Б *Изв. вузов. Радиофиз.* **42** 373 (1999)
75. Малыкин Г Б *УФН* **170** 1325 (2000)
76. Малыкин Г Б *УФН* **172** 969 (2002)
77. Малыкин Г Б *УФН* **169** 585 (1999)
78. Малыкин Г Б *ПММ* **63** 775 (1999)
79. Малыкин Г Б *Изв. РАН. Сер. Мех. тв. тела* (4) 187 (2000)
80. Малыкин Г Б, Пермитин Г В, в кн. *Физическая энциклопедия* (Гл. ред. А М Прохоров) Т. 5 (М.: Большая Российская энциклопедия, 1998) с. 123
81. Penrose R *Proc. Cambr. Philos. Soc.* **55** (1) 137 (1959)
82. Terrell J *Phys. Rev.* **116** 1041 (1959)
83. Вайскопф В *Физика в двадцатом столетии* (М.: Атомиздат, 1977) с. 179
84. Болотовский Б М, в сб. *Эйнштейновский сборник 1986–1990* (Под ред. И Ю Кобзарева) (М.: Наука, 1990) с. 279
85. Бурланков Д Е, Малыкин Г Б, Препринт № 576 (Н. Новгород: ИПФ РАН, 2001)

Topological phase in classical mechanics

G.B. Malykin
Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences,
ul. Ul'yanova 46, 603950 Nizhniĭ Novgorod, Russian Federation
Tel. (*7-8312*) *16-43 70*
E-mail: *malykin@mail.nnov.ru*
S.A. Kharlamov
V.I. Kuznetsov Research Institute of Applied Mechanics
ul. Aviamotornaya 55, 111123 Moscow, Russian Federation
Tel. (*7-095*) *273-33 00*
E-mail: *niipm-gyro@dol.ru*; *sakharlam@mtu-net.ru*

The historical development of the concept of the topological phase in classical mechanics from the mid-18th century to the present is discussed. There are three stages to be recognized in this period. The first, mid-18th century stage, is concerned with the study of rigid body rotation kinematics and includes such milestone developments as Euler's finite rotation theorem, Gauss' formula for the sum of the angles of a spherical polygon, Rodrigues' proof of the non-commutativity property of two finite rotations, and, finally, Hamilton's "Lectures on Quaternions" where the solid angle theorem is formulated and proved. The experimental discovery of nonholonomic gyroscope errors and their exhaustive explanation by A.Yu. Ishlinskiĭ represent the second stage. The third stage, which started in the 80s of the 20th century, has witnessed the rediscovery of the nonholonomic effect in the framework of Hamiltonian formalism and is dominated by the study of how the topological phase — or an additional angle — forms in a mechanical system in action-angle variables.

PACS numbers: **01.65.+g**, 03.65.Vf, 45.40.Cc

Bibliorgaphy — 85 references

Received 9 April 2003