

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

## Торможение магнитного диполя, движущегося с произвольной скоростью в проводящей трубке

Б.А. Князев, И.А. Котельников, А.А. Тютин, В.С. Черкасский

*В известном опыте, который часто показывают студентам на вводной лекции по электромагнитной индукции, небольшой магнит падает в длинной проводящей трубке. Возникающие в трубке вихревые токи Фуко создают тормозящую силу, которая заметно увеличивает время падения магнита. В настоящей статье получена формула для тормозящей силы, справедливая как при малых скоростях, когда тормозящая сила пропорциональна скорости движения магнита  $v$ , так и при больших скоростях, когда сила торможения уменьшается сначала пропорционально  $v^{-1}$ , а затем пропорционально  $v^{-1/2}$ . Последние два режима имеют аналог в виде явления "просвиста", приводящего к неограниченному ускорению электронов в плазме, и ранее не были описаны в литературе. Приведены также расчеты тормозящей силы при наличии продольного разреза в стенке трубки, и описаны эксперименты по измерению этой силы.*

PACS numbers: 01.50.-i, 41.20.Gz

### Содержание

1. Введение (965).
  2. Теория (966).
    - 2.1. Приближение слабого скин-эффекта. 2.2. Приближение сильного скин-эффекта. 2.3. Точное решение. 2.4. Труба с продольным разрезом.
  3. Эксперимент (971).
    - 3.1. Падение магнита в сплошной трубке. 3.2. Падение магнита в трубке с продольным разрезом.
  4. Заключение (974).
- Список литературы (974).

### 1. Введение

Падение магнита в вертикальной проводящей трубке — популярная и эффектная демонстрация, используемая во вводных курсах физики для иллюстрации эффекта электромагнитной индукции. Переменный магнитный поток,

создаваемый движущимся магнитом, индуцирует вихревые токи в проводящих стенках трубки. Эти токи создают вторичное магнитное поле, которое, в свою очередь, создает тормозящую силу. Магнитное торможение значительно уменьшает скорость падения магнита в металлической трубке по сравнению со скоростью свободного падения в непроводящей трубке. Например, в описываемых в разделе 3 опытах небольшой магнитик пролетает через метровую стеклянную трубку за 0,6 с, а через медную — за 10 с.

Имеется много работ, в которых эффект магнитного торможения исследован теоретически и проверен экспериментально при различной геометрии проводника, в том числе в форме плоского листа, магнитной подушки, вращающегося диска и трубки [1–9]. В статье Macc-Latchy, Baskman, Vogan [5] изложена простейшая теория тормозящей силы, действующей на магнит в бесконечно длинной трубке, которая пропорциональна скорости движения магнита  $v$ . В той же работе вычислена предельная скорость  $v_\infty$  магнита и с помощью катушки, намотанной на медную трубу, экспериментально зарегистрирована величина э.д.с. Nahn с соавторами [7] изучали резонансные колебания магнита, подвешенного на пружинке внутри труб с различными диаметрами и различной удельной проводимостью. Развитая ими теория аналогична теории [3, 5], но учитывает также конечную длину трубы.

Эксперимент с падением магнита через проводящую трубку в поле тяжести давно используется в Новосибирском государственном университете в качестве лекционной демонстрации [10]. Решив несколько лет назад расширить набор предлагаемых студентам лабораторных работ, мы провели анализ публикаций по магнит-

**Б.А. Князев, И.А. Котельников.** Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН, 630090 Новосибирск, просп. Лаврентьева 11, Российская Федерация  
Тел. (383) 339-42-68  
E-mail: b.a.knyazev@inp.nsk.su; i.a.kotelnikov@nsk.su  
**А.А. Тютин, В.С. Черкасский.** Новосибирский государственный университет, физический факультет, 630090 Новосибирск, ул. Пирогова 2, Российская Федерация  
Тел. (383) 339-78-05  
E-mail: cherk@phys.nsu.ru

Статья поступила 31 августа 2005 г.

ному торможению. При этом выяснилось, что теория явления ограничивается приближением точечного магнитного диполя для моделирования магнита конечных размеров и рассматривается только случай слабого скин-эффекта, когда глубина проникновения магнитного поля в металл  $\delta$  (толщина скин-слоя) намного больше толщины стенки трубки  $h$ , причем магнитная проницаемость трубки равна единице,  $\mu = 1$ . Перечисленные допущения не всегда верны, что и стало побудительным мотивом для построения более общей теории магнитного торможения.

Анализ описанных в литературе экспериментов с падающим магнитом показал, что исследованы не все особенности этого явления. Например, не регистрировалась динамика торможения, а измерялась только предельная скорость магнита. Насколько нам известно, не изучалось также перемещение магнита в трубе с трещинами или разрезами. В настоящей статье мы постарались восполнить указанные пробелы как экспериментально, так и теоретически.

## 2. Теория

Хотя общая теория, представленная в разделе 2.3, не использует какие-либо предварительные предположения относительно соотношения параметров  $\delta$  и  $h$ , мы сначала рассмотрим предельные случаи слабого скин-эффекта, когда  $\delta/h \gg 1$ , и сильного скин-эффекта, когда  $\delta/h \ll 1$ , и только затем перейдем к построению общей теории. Такой подход нам представляется более поучительным, поскольку позволяет нагляднее раскрыть механизм магнитного торможения.

Для удобства читателя в разделе 2.1 воспроизведена стандартная теория торможения, которая применима при малой скорости движения магнита. В разделе 2.2 рассмотрен, напротив, случай очень больших скоростей. Здесь показано, что тормозящая сила убывает с увеличением скорости пропорционально  $v^{-1/2}$ . В разделе 2.3 получена общая формула, справедливая во всем диапазоне скоростей (но без учета релятивистских эффектов). Из этой формулы следует существование промежуточного режима, при котором сила пропорциональна  $v^{-1}$ . В заключительном разделе теории 2.4 приведено решение задачи о движении магнита в немагнитной трубе с длинным продольным разрезом в пределе малых скоростей.

### 2.1. Приближение слабого скин-эффекта

Магнитное поле движущегося магнита индуцирует вихревые токи в проводящих стенках трубки. Если магнит перемещается вдоль оси трубки, а его полюсы ориентированы вдоль этой оси, то вихревые токи текут в азимутальном направлении (рис. 1а). Индуцированные токи создают неоднородное "вторичное" магнитное поле, которое действует на падающий магнит с силой

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \nabla) \mathbf{B}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{m}$  — магнитный момент диполя. Сила направлена в сторону, противоположную скорости магнита, т.е. замедляет движение. Далее для определенности мы будем иметь в виду случай падения магнита в поле тяжести, хотя для вычисления силы магнитного торможения природа силы, приведшей магнит в движение, не

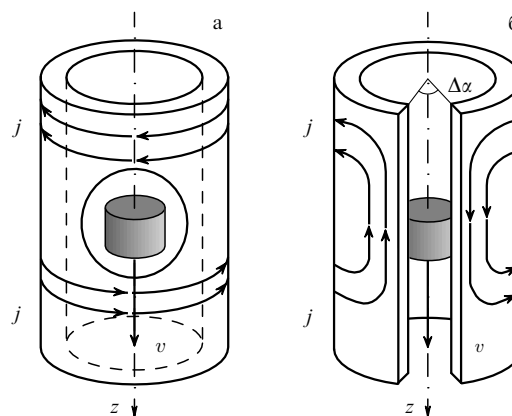


Рис. 1. Схема падения магнита через целую (а) и разрезанную (б) проводящую трубу.

имеет значения. Так как сила торможения увеличивается с ростом скорости, в конечном итоге устанавливается постоянная скорость падения магнита в поле тяжести, при которой силы тяжести и торможения уравновешивают друг друга.

Как отмечалось во введении, при теоретическом описании магнитного торможения обычно явно или неявно предполагается, что труба слабо возмущает магнитное поле движущегося магнита и, следовательно, это поле может быть рассчитано так, как будто магнит падает в свободном пространстве. Это предположение справедливо, во-первых, для трубы, сделанной из немагнитного материала, и, во-вторых, при относительно низкой скорости движения  $v$ , когда эффективная глубина скин-слоя  $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$ , оцененная для характерной частоты  $\omega \sim v/a$  и заданной проводимости материала стенки  $\sigma$ , больше радиуса трубы  $a$ ; более точный критерий будет сформулирован в разделе 2.3.

Наш вывод формулы для силы торможения в данном разделе близок к используемому в [3], но мы изменили его так, чтобы перекинуть мост к разделу 2.2, в котором рассматривается случай сильного скин-эффекта.

Заменим, как это принято в стандартной теории, магнит конечных размеров точечным диполем и предположим, что магнитный момент диполя  $\mathbf{m}$  направлен вдоль оси  $z$  круглой трубы с внутренним радиусом  $a$  и внешним радиусом  $b$ . Пусть диполь движется вдоль оси трубы  $z$ , которой соответствует  $r = 0$  в цилиндрической системе координат  $(r, \alpha, z)$ , а его положение на оси  $z$  в произвольный момент времени  $t$  задано функцией  $z_m(t)$ .

Аксиальная симметрия задачи позволяет выбрать такую калибровку, в которой скалярный потенциал  $\phi$  всюду равен нулю, а векторный потенциал  $\mathbf{A}$  имеет только азимутальную компоненту,  $\mathbf{A} = A_\alpha(r, z, t) \mathbf{e}_\alpha$ . Тогда отличны от нуля только следующие компоненты электромагнитного поля:

$$B_r = -\frac{\partial A_\alpha}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\alpha}{\partial r}, \quad E_\alpha = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_\alpha}{\partial t}. \quad (2)$$

При слабом скинировании магнитное поле магнита почти не возмущается стенкой трубки, если трубка сделана из немагнитного материала, т.е.  $\mu = 1$ . Тогда

$$A_\alpha(r, z, t) = \frac{mr}{[r^2 + (z - z_m(t))^2]^{3/2}}. \quad (3)$$

Учитывая, что  $\partial A_z / \partial t = -v \partial A_z / \partial z$ , где  $v = \dot{z}_m$  есть мгновенная скорость движения диполя, можно сразу вычислить индуцированное электрическое поле  $E_x$ . В стенках трубки оно вызывает появление вихревого тока с плотностью  $j_x = \sigma E_x$ . Этот ток создает "вторичное" магнитное поле, которое на оси  $z$  имеет только  $z$ -компоненту

$$B_z(z, t) = \frac{1}{c} \int_{-L/2}^{L/2} dz' \int_a^b dr' \frac{2\pi r'^2 j_x(r', z')}{[r'^2 + (z - z')^2]^{3/2}}, \quad (4)$$

где  $\pm L/2$  —  $z$ -координаты концов трубы. Дифференцируя подынтегральное выражение в (4) по  $z$  и приравнявая затем  $z$  к  $z_m(t)$ , вычисляем градиент поля в точке расположения диполя. Умножая результат на  $m$ , находим тормозящую силу

$$F = -\frac{18\pi\sigma m^2 v}{c^2} \int_{-L/2}^{L/2} dz' \int_a^b dr' \frac{r'^3 (z_m - z')^2}{[r'^2 + (z_m - z')^2]^5}. \quad (5)$$

Сила  $F$  практически не зависит от координаты диполя  $z_m(t)$ , если тот достаточно удален от концов трубки. В пределе  $|z_m \pm L/2| \gg a$  из (5) получаем

$$F = -\frac{15\pi^2 \sigma m^2 v}{64c^2} \left( \frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right). \quad (6)$$

В случае тонкостенной трубки,  $h = b - a \ll a$ , выражение (6) сводится к хорошо известному результату [3]:

$$F = -\frac{45\pi^2}{64} \frac{\sigma m^2 v h}{a^4 c^2}. \quad (7)$$

Знак "минус" здесь явно указывает, что сила направлена против скорости магнита, тем самым оправдывая свое название "тормозящая сила".

Тормозящая сила может быть рассчитана также по энергетическому балансу. Действительно, мощность  $P$ , рассеянная в проводящей стенке трубы, равна с противоположным знаком работе  $A = vF$ , совершаемой силой торможения за единицу времени, т.е.

$$P = \int_{-L/2}^{L/2} dz' \int_a^b d\rho \, 2\pi \rho \sigma E_x^2(\rho, z').$$

Вычислив электрическое поле  $E_x$  с помощью уравнений (2) и (3) и поделив результат вычисления  $P$  в пределе  $L \rightarrow \infty$  на  $-v$ , получим ту же формулу (6).

"Энергетический" метод расчета будет использован в разделе 2.2, где найдена сила магнитного торможения в пределе очень быстрого движения магнита.

### 2.2. Приближение сильного скин-эффекта

Пусть скорость магнита настолько велика, что глубина скин-слоя  $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$ , оцененная по характеристической частоте  $\omega \sim v/a$ , мала по сравнению с толщиной  $h$  стенки трубы,  $\delta \ll h$ . До столь высокой скорости магнит нужно разгонять не силой тяжести, а, например, с помощью пневматического ружья или пружины. При  $\delta \ll h$  магнитный поток полностью "зажат" внутри трубы и вихревые токи значительно ослабляют магнитное поле снаружи трубы, даже если магнитная проницаемость  $\mu$  близка к единице и магнитное (статическое) экранирование не играет заметной роли.

Так как движение магнита макроскопических размеров в любом случае остается дорелятивистским,  $v \ll c$ , магнитное поле все еще может быть найдено в рамках

квазистатического приближения, аналогичного использованному в разделе 2.1. Это означает, что вектор-потенциал  $A_x(r, z, t)$  зависит от времени  $t$  только через комбинацию  $z - vt$ , т.е.  $A_x(r, z, t) = A_x(r, z - vt)$ , если диполь находится достаточно далеко от концов трубки. Тогда  $E_x = (v/c) \partial A_x / \partial z$ .

Для начала примем, что проводимость материала трубки бесконечно велика,  $\sigma = \infty$ , следовательно, глубина проникновения поля магнита в стенки трубки исчезающе мала, т.е.  $\delta = 0$ . Тогда  $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$  как внутри стенок трубки, так и снаружи. При этих предположениях соответствующее решение уравнений Максвелла для полости трубы должно удовлетворять граничным условиям  $E_x = B_r = 0$  на внутреннем радиусе трубы, т.е. при  $r = a$ . Внутри трубы, при  $r < a$ , вектор-потенциал подчиняется уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_x = 0, \quad (8)$$

которое следует из уравнения  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$  для статического магнитного поля. Уравнение (8) имеет линейно независимые частные решения в виде  $I_1(|kr|) \exp(ikz)$  и  $K_1(|kr|) \exp(ikz)$ , где  $I_m$  и  $K_m$  — функции Бесселя порядка  $m$  от мнимого аргумента первого и второго рода соответственно [11]. Следовательно, векторный потенциал при  $r < a$  можно записать в виде интеграла Фурье:

$$A_x = \frac{2m}{\pi} \int_0^\infty dk k \cos(kz - kv t) [K_1(kr) + \alpha_k I_1(kr)]. \quad (9)$$

Первый член в квадратных скобках под знаком интеграла сингулярен в точке, в которой находится магнитный диполь. Так как

$$\frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k \cos(kz) K_1(kr),$$

этот член описывает потенциал магнитного диполя в свободном пространстве. Второй член в квадратных скобках в (9) регулярен, а коэффициенты  $\alpha_k$  могут быть найдены из граничных условий  $A_x = 0$  при  $r = a$ :

$$\alpha_k = -\frac{K_1(ka)}{I_1(ka)}.$$

Чтобы найти тормозящую силу, теперь достаточно вычислить полную мощность  $P$ , рассеянную в стенке трубки, и приравнять эту мощность к работе  $-vF$  тормозящей силы  $F$  в единицу времени. Полная рассеянная мощность равна потоку энергии

$$P = 2\pi \int_{-\infty}^\infty S_r dz \quad (10)$$

через поверхность внутренней стенки трубы, где  $S_r = (c/4\pi) E_x B_z$  — радиальная компонента вектора Пойнтинга при  $r = a$ ; мы выбрали бесконечные пределы интегрирования в (10), пренебрегая тем самым концевыми эффектами. Однако прямое вычисление показывает, что в использованном нами приближении  $P = 0$ , поскольку  $E_x = 0$  при  $r = a$  и, следовательно, поток энергии к стенке трубки отсутствует. Это означает, что тормозящая сила исчезающе мала в пределе  $\sigma \rightarrow \infty$ , в соответствии со здравым смыслом. С другой стороны,

исчезновение тормозящей силы противоречит результату раздела 2.1, который, таким образом, оказывается справедливым только при относительно медленных движениях или плохой проводимости материала трубки.

Вычисление электромагнитного поля движущегося магнита при большой, но конечной проводимости трубки является сложной задачей (см. раздел 2.3). Прделанные выше вычисления для случая  $\sigma = \infty$ , при кажущейся их бесполезности, позволяют найти силу торможения в пределе большой, но конечной проводимости, если использовать граничное условие Леонтовича [12] на внутренней поверхности стенки, чтобы выразить электрическое поле  $E_z$  через  $B_z$ . Согласно Леонтовичу, амплитуда фурье-образа электрического поля

$$E_{z\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} E_z \exp(i\omega t) dt$$

равна фурье-образу магнитного поля

$$B_{z\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} B_z \exp(i\omega t) dt,$$

умноженному на поверхностный импеданс:

$$E_{z\omega} = [1 - \text{sign}(\omega)] \sqrt{\frac{\mu|\omega|}{8\pi\sigma}} B_{z\omega}. \quad (11)$$

Поскольку продольное магнитное поле

$$B_z = -\frac{2m}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk k}{aI_1(ka)} \cos(kz - kz_m)$$

на поверхности трубки при  $r = a$  не исчезает даже в пределе  $\sigma \rightarrow \infty$ , его можно использовать для вычисления фурье-амплитуды

$$B_{z\omega} = -\frac{2m|\omega/v|}{a\mu I_1(|\omega a/v|)} \exp\left(-\frac{i\omega z}{v}\right), \quad (12)$$

чтобы затем с помощью (11) найти электрическое поле на поверхности стенки с конечной проводимостью. Используя теорему Парсеваля, теперь нетрудно выразить мощность омических потерь в стенке трубки через  $B_{z\omega}$ :

$$P = \frac{acv}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} |B_{z\omega}|^2.$$

Выполнив интегрирование и поделив  $P$  на  $-v$ , находим силу торможения в пределе сильного скин-эффекта:

$$F = -\frac{m^2 c \sqrt{\mu}}{\sqrt{2\pi^3 v \sigma a^9}} \int_0^{\infty} d\xi \frac{\xi^{5/2}}{I_1^2(\xi)} = -\frac{3,45 m^2 c \sqrt{\mu}}{\sqrt{4\pi v \sigma a^9}}. \quad (13)$$

Так как  $F$  уменьшается с ростом  $v$  пропорционально  $v^{-1/2}$ , движение магнита оказывается неустойчивым, поскольку случайное увеличение скорости приводит к неограниченному ускорению. Подобное явление известно в физике плазмы: надтепловые электроны неограниченно ускоряются внешним электрическим полем вследствие того, что сила трения уменьшается пропорционально кубу их скорости. В разделе 2.3 будет показано, что имеется еще и промежуточный режим, при котором  $F \propto v^{-1}$  в диапазоне  $1 \ll \delta/h \ll a/\mu\delta$ .

### 2.3. Точное решение

Метод, использованный в разделе 2.2, при небольшой модификации позволяет вычислить силу магнитного торможения во всем диапазоне возможных скоростей движения магнита. Для реализации этого целесообразно переписать уравнение (9) в виде

$$A_z(r, z - vt) = \frac{m}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp[ik(z - vt)] |k| \times \\ \times [K_1(|kr|) + \alpha_k I_1(|kr|)],$$

допуская, что коэффициент  $\alpha_k$  может принимать комплексные значения внутри трубы, т.е. при  $r < a$ . Подобное выражение нужно записать и для других областей пространства, поскольку в общем случае априори нельзя считать, что поле близко к полю магнитного диполя, как в случае слабого скинирования, или, напротив, равно нулю, как в случае сильного скин-эффекта.

Снаружи трубы, в области  $r > b$ , в интеграле Фурье необходимо оставить только члены, которые убывают при  $r \rightarrow \infty$ :

$$A_z(r, z - vt) = \frac{m}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp[ik(z - vt)] \beta_k |k| K_1(|kr|). \quad (15)$$

Внутри стенки проводящей трубы, при  $a < r < b$ , вектор-потенциал удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_z = -\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial A_z}{\partial t}, \quad (16)$$

как это следует из уравнений  $\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}/c$ ,  $\text{rot } \mathbf{E} = -(1/c)(\partial/\partial t) \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ . Подходящее решение уравнения (16) можно записать в виде

$$A_z(r, z) = \frac{m}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp[ik(z - vt)] |k| \times \\ \times [\mu_k I_1(\chi r) + \nu_k K_1(\chi r)], \quad (17)$$

где  $\chi = \sqrt{k^2 - 4\pi i k v \sigma \mu / c^2}$ .

Коэффициенты  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ ,  $\mu_k$ ,  $\nu_k$  должны быть найдены из граничных условий на внутренней и внешней поверхностях стенки. Эти условия включают в себя непрерывность векторного потенциала  $A_z$  и его производной  $\partial A_z / \partial r$  при  $r = a$  и  $r = b$ . Для расчета тормозящей силы необходимо знать только коэффициент  $\alpha_k$ , поскольку

$$F = \frac{m^2}{\pi} \int_0^{\infty} dk ik^3 [\alpha_k - \alpha_{-k}]. \quad (18)$$

Простые, но громоздкие вычисления дают

$$\alpha_k = -\frac{K_+(a) K_-(b) - K_-(a) K_+(b)}{I_-(a) K_-(b) - I_+(a) K_+(b)}, \quad (19)$$

где

$$K_+(r) = \chi I_0(\chi r) K_1(|k|r) + \mu |k| I_1(\chi r) K_0(|k|r), \\ K_-(r) = \chi K_0(\chi r) K_1(|k|r) - \mu |k| K_1(\chi r) K_0(|k|r), \\ I_+(r) = \chi K_0(\chi r) I_1(|k|r) + \mu |k| K_1(\chi r) I_0(|k|r), \\ I_-(r) = \chi I_0(\chi r) I_1(|k|r) - \mu |k| I_1(\chi r) I_0(|k|r).$$

Результаты разделов 2.1, 2.2, выражения (6) и (13), могут быть получены из общего решения (18) в соответствующую

щих предельных случаях, хотя переход к пределу оказывается нетривиальной задачей.

Для получения новых результатов, не представленных ранее, запишем силу трения (18) в параметрическом виде

$$F = -\frac{m^2}{a^4} \mathcal{F}(\mu, \varepsilon, \eta), \quad (20)$$

где функция  $\mathcal{F}$  зависит от трех безразмерных параметров:  $\mu$ ,  $\varepsilon = (b-a)/a$  и  $\eta = 4\pi\sigma va/c^2$ .

В случае  $\eta \ll 1$ , что соответствует пределу малой скорости, рассмотренному в разделе 2.1 при дополнительном условии  $\mu = 1$ , общая формула (18) может быть сведена к обозримому выражению при произвольной величине  $\mu$ , если толщина стенки трубы достаточно велика, т.е. при  $\varepsilon \gg 1$ :

$$\mathcal{F} = \frac{\eta}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\mu^2 x^4 [K_2(x) K_0(x) - K_1^2(x)]}{[1 + (\mu - 1) x I_0(x) K_1(x)]^2}. \quad (21)$$

Функция (21) представлена на рис. 2.

При  $\mu = 1$  интегрирование в (21) дает

$$\mathcal{F} = \frac{15\pi}{256} \eta \approx 0,184 \eta \quad (22)$$

в согласии с формулой (6). При больших  $\mu$  функция (21) стремится к почти вдвое большему значению:

$$\mathcal{F} \approx 0,359 \eta. \quad (23)$$

При  $\varepsilon \ll 1$  можно пользоваться результатами раздела 2.1, поскольку формула (7) верна при любой величине  $\mu$ , не завися от нее. В безразмерных переменных уравнение (7) принимает вид

$$\mathcal{F} = \frac{45\pi}{256} \varepsilon \eta \approx 0,552 \varepsilon \eta. \quad (24)$$

Как видно, в случае медленного движения сила трения не очень чувствительна к магнитным свойствам трубки. Однако это утверждение справедливо, только если магнит движется точно вдоль оси цилиндрической трубки. Любое отклонение от оси привело бы к притяжению и, возможно, к прилипанию магнита к ферромагнитной стенке трубки.

Противоположный случай быстрого движения, рассмотренный в разделе 2.2, имеет место при  $\varepsilon \eta \gg 1/(\mu\varepsilon)$ .

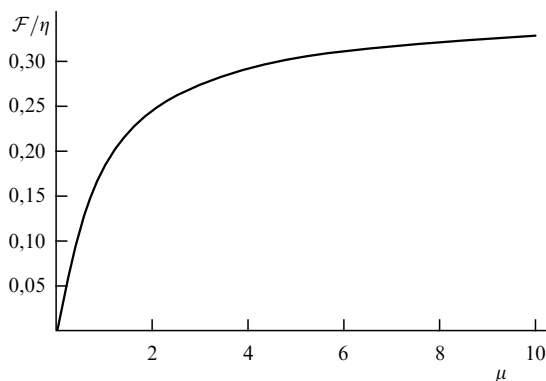


Рис. 2. Функция  $\mathcal{F}$  в зависимости от  $\mu$  при  $\eta \leq 1$ .

Тогда

$$\mathcal{F} = \frac{\sqrt{2\mu}}{\pi\sqrt{\eta}} \int_0^\infty \frac{d\xi \xi^{5/2}}{I_1^2(\xi)} \approx 3,45 \sqrt{\frac{\mu}{\eta}} \quad (25)$$

в согласии с (13).

Между двумя предельными случаями (24) и (25) имеется промежуточный интервал  $1 \ll \varepsilon \eta \ll 1/(\mu\varepsilon)$ , на котором сила трения пропорциональна  $v^{-1}$ :

$$\mathcal{F} = \frac{2}{\pi\varepsilon\eta} \int_0^\infty \frac{d\xi \xi^2}{I_1^2(\xi)} \approx \frac{4,78}{\varepsilon\eta}. \quad (26)$$

Интервал существует, если  $\varepsilon \ll 1/\mu$ , и соответствует случаю, когда толщина стенки трубы  $h = b - a$  меньше толщины скин-слоя  $\delta$ , но превышает некоторое значение, а именно  $\delta^2 \mu/a \ll h \ll \delta$ . В этом интервале параметров проводящий цилиндр эффективно экранирует электромагнитное поле, даже если  $\delta \gg h$  [13, 14].

На рисунке 3 иллюстрируется возможность реализации режимов (25) и (26) для различных материалов. Для медной трубы с относительной толщиной стенок  $h/a = 0,25$  зависимость  $F \propto v^{-1/2}$  реализуется при  $va \sim 10^4 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$ , а  $F \propto v$  — при  $va \sim 2 \times 10^3 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$ ; при  $a = 0,665 \text{ см}$  необходимы соответственно скорости магнита 200 и 40 мс<sup>-1</sup>. Для толстой медной трубы с толщиной стенок  $h = 2,5 \text{ мм}$  и средним радиусом  $R = (a + b)/2 = 4 \text{ мм}$  необходимы скорости 40 и 6 мс<sup>-1</sup> соответственно. Такие значения вполне могут быть достигнуты в простом студенческом эксперименте.

Весь диапазон  $\varepsilon \eta \ll 1/(\mu\varepsilon)$  описывается формулой

$$\mathcal{F} = \frac{2\varepsilon\eta}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi \xi^4 K_1^2(\xi)}{1 + \varepsilon^2 \eta^2 \xi^2 I_1^2(\xi) K_1^2(\xi)}. \quad (27)$$

Формула (27) может быть получена из "первых принципов", если пренебречь изменением  $A_x$  (т.е. изменением электрического поля и плотности тока) на толщине стенки трубы. Тогда стенку трубы можно представить в виде бесконечно тонкого токового слоя и решить уравнение (14) и вне трубы (15) с помощью граничных

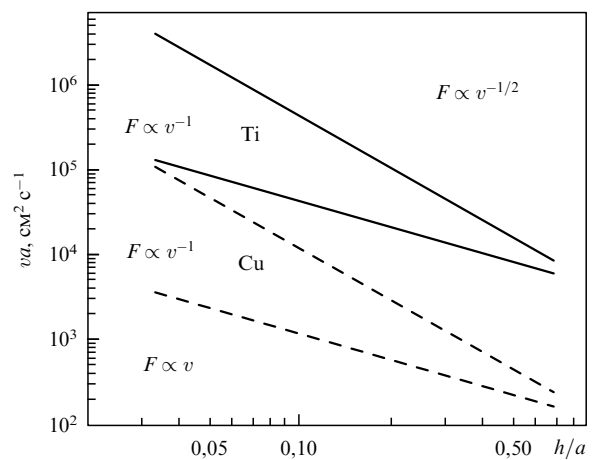
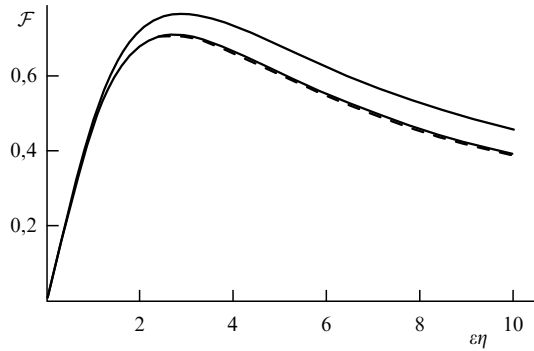


Рис. 3. Области с различной функциональной зависимостью  $F(v)$ . Область между прямыми линиями (сплошными для титановой трубки, штриховыми для медной) соответствует зависимости  $F \propto v^{-1}$ ;  $F \propto v$  в области, лежащей под нижней прямой;  $F \propto v^{-1/2}$  в области, лежащей над верхней прямой.



**Рис. 4.** Сила торможения для тонкой проводящей стенки. Штриховая кривая соответствует приближенному решению (27), справедливому при  $\epsilon\eta \ll 1/(\mu\epsilon)$  в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$ . Сплошные кривые показывают точное решение при  $\mu = 1$  для двух значений  $\epsilon$ :  $\epsilon = 0,1$  (верхняя кривая) и  $\epsilon = 0,01$  (эта кривая почти совпадает со штриховой кривой).

условий  $E_x(a + 0) - E_x(a - 0) = 0$  и  $B_z(a + 0) - B_z(a - 0) = -4\pi I/c$ , где  $I = \sigma h E_x(a)$  — полный ток на единицу длины стенки трубы. Функция (27) не зависит от  $\mu$  (рис. 4). Следовательно, сила магнитного торможения в трубке с тонкой стенкой,  $\epsilon \ll 1$ , не зависит от магнитных свойств материала трубки, а зависимость от других параметров,  $\epsilon$  и  $\eta$ , выражается только через их произведение, если  $\epsilon\eta \ll 1$ . Эта сила достигает максимального значения  $\mathcal{F} = 0,704$  при  $\epsilon\eta = 2,69$ .

Для сравнения полученных результатов с экспериментальными мы далее ограничимся случаем, описываемым уравнением (27), в предположении, что  $\epsilon \ll 1$  и  $\epsilon\eta \ll 1/(\mu\epsilon)$ . В размерных единицах эти неравенства преобразуются к виду  $h \ll a$  и  $h \ll \delta$  соответственно, где  $\delta \sim c/\sqrt{2\pi\sigma\mu v/a}$ .

**2.4. Труба с продольным разрезом**

Продольный разрез разрывает азимутальный ток, циркулирующий в стенке трубы. Однако имеются как минимум два эффекта, которые способны поддержать ток.

Во-первых, ток смещения  $-(1/c) \partial \mathbf{E} / \partial t$ , в принципе, способен "перехватить" ток проводимости на краях разреза, но этот эффект является незначительным при малых скоростях.

Второй эффект более важен. Поскольку вихревые токи, индуцированные электродвижущей силой, направлены в противоположные стороны впереди и позади движущегося магнита (см. рис. 1), они могут замыкаться по берегам разреза. В квазистатическом приближении электрический заряд не может накапливаться в объеме стенки, распределяясь на поверхностях стенки так, чтобы обеспечить замыкание токов проводимости. В объеме стенки

$$\mathbf{E} = \frac{v}{c} \frac{\partial A_z}{\partial z} \mathbf{e}_z - \nabla \phi, \tag{28}$$

где  $A_z = mr/[r^2 + (z - vt)^2]^{3/2}$  — вектор-потенциал точечного магнитного диполя  $m$  в свободном пространстве, а  $\phi$  — скалярный (электрический) потенциал, индуцированный поверхностными зарядами; приближение (28) соответствует случаю слабого скин-эффекта.

Потенциал  $\phi$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta \phi = 0$  внутри стенки. Для тонкой стенки,  $h \ll a$ , уравнение Лапласа можно упростить, приняв во внимание,

что внутри стенки отсутствует радиальное электрическое поле,  $\partial \phi / \partial r = 0$ . Тогда в уравнении Лапласа можно оставить только производные по  $\alpha$  и  $z$ , заменив переменную  $r$  радиусом трубы  $a$ :

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \tag{29}$$

Отсутствие радиального электрического поля следует из граничных условий для плотности тока

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \tag{30}$$

который должен исчезать на границе проводящего материала, если можно пренебречь током смещения. Решение уравнения (29) ищем в виде

$$\phi(\alpha, z) = \int_0^\infty dk \sin(kz - kv t) \times [\mu_k \exp(k\alpha a) + \nu_k \exp(-k\alpha a)], \tag{31}$$

а коэффициенты  $\mu_k, \nu_k$  находим из граничных условий для азимутальной компоненты плотности тока  $j_\alpha = 0$  на обоих краях разреза.

Обозначив угловую ширину разреза через  $\Delta\alpha$  (см. рис. 1) и приняв, что краям разреза соответствуют азимуты  $\alpha = \pm(\pi - \Delta\alpha/2)$ , находим

$$\mu_k = -\nu_k = -\frac{mv}{\pi c} \frac{kK_1(ka)}{\cosh[(\pi - \Delta\alpha/2)ka]}. \tag{32}$$

Мощность, диссипируемая в стенке, равна

$$P = h \int_{-\pi + \Delta\alpha/2}^{\pi - \Delta\alpha/2} d\alpha a \int_{-\infty}^\infty dz \frac{j_\alpha^2 + j_z^2}{\sigma}, \tag{33}$$

где компоненты плотности тока  $j_\alpha, j_z$  вычисляются с помощью уравнений (28) и (30)–(32):

$$j_\alpha = \frac{2m\sigma v}{\pi c} \int_0^\infty dk k^2 K_1(ka) \sin[k(z - vt)] \times \frac{\cosh[k\alpha a] - \cosh[(\pi - \Delta\alpha/2)ka]}{\cosh[(\pi - \Delta\alpha/2)ka]}, \tag{34}$$

$$j_z = \frac{2m\sigma v}{\pi c} \int_0^\infty dk k^2 K_1(ka) \cos[k(z - vt)] \times \frac{\sinh[k\alpha a]}{\cosh[(\pi - \Delta\alpha/2)ka]}.$$

Выполнив интегрирование по  $z$  и  $\alpha$  в уравнении (33) и поделив результат на  $-v$ , находим силу торможения:

$$\mathcal{F} = -\frac{45\pi}{256} \mathcal{Q}\left(\pi - \frac{\Delta\alpha}{2}\right) \epsilon\eta, \tag{35}$$

где функция

$$\mathcal{Q}(\beta) = \frac{512}{45\pi^3} \int_0^\infty d\xi \xi^3 K_1^2(\xi) [\beta\xi - \tanh(\beta\xi)]$$

дает отношение тормозящих сил в трубах с разрезом и без разреза (рис. 5). При  $\Delta\alpha \leq 3\pi/2$  эта зависимость может быть аппроксимирована с точностью до нескольких процентов линейной функцией

$$\mathcal{Q}\left(\pi - \frac{\Delta\alpha}{2}\right) \approx 0,77 - 0,16\Delta\alpha. \tag{36}$$

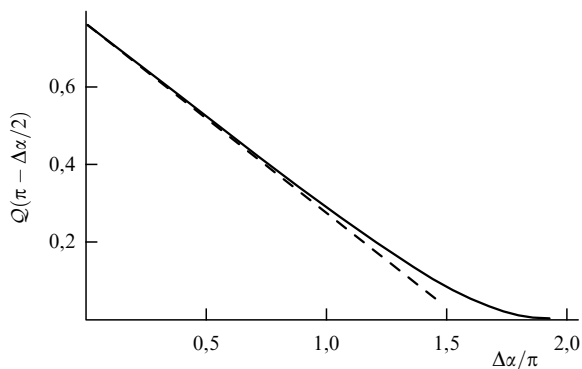


Рис. 5. Функция  $Q(\pi - \Delta\alpha/2)$  (сплошная кривая) и ее линейная аппроксимация (штриховая прямая).

### 3. Эксперимент

Мы исследовали падение магнита в вертикальной трубе в поле тяжести. Условия эксперимента соответствовали режиму движения с малой скоростью,  $\eta \ll 1$ . Экспериментальная установка состояла из набора вертикальных трубок длиной  $L = 90$  см, сделанных из меди, алюминиевого сплава, латуни, титана и стекла. Использувавшиеся трубки не имели сертификатов, и точные значения их проводимости нам не были известны. Размеры трубок приведены в таблице. Цилиндрический магнит из сплава неодима, железа и бора диаметром 1 см и длиной 1 см был намагничен вдоль оси. Магнит начинал падение от верхнего конца трубы с нулевой скоростью. На внешнюю поверхность каждой из трубок было намотано по семь катушек с периодом 10 см. Каждая катушка состояла из 20 витков и имела длину 8 мм. Катушки были соединены последовательно и подключены к цифровому осциллографу "Tektronix TDS-220".

#### 3.1. Падение магнита в сплошной трубе

Зависимость напряжения на катушках для стеклянной, титановой и алюминиевой трубок от времени приведена на рис. 6. Ясно, что сигналы пропорциональны вихревому току, текущему по внешней поверхности трубок. Пики на осциллограммах, очевидно, возникают от э.д.с. в катушке, наиболее близкой к мгновенному положению падающего магнита. Поскольку  $U(t) = 0$ , когда магнит пролетает через центр катушки, время пролета расстоя-

ния между соседними катушками может быть определено по осциллограмме. Результат такой обработки показан на рис. 7, где  $t = 0$  соответствует началу пролета верхней измерительной катушки. Зависимость  $t-z$  строилась по средним значениям, полученным в 12 и более экспериментах для каждой трубки. Погрешности измерений значительно меньше размера точек, изображенных на графике. В медной трубке с наибольшей удельной проводимостью магнит пролетал 70 см приблизительно за 10 с. Столь медленное падение производит сильное впечатление при демонстрации этого эффекта. Электропроводность титановой трубки в 20 раз меньше, и время пролета уменьшается до 0,35 с.

Глубина скин-слоя  $\delta$ , оцененная по характеристической частоте  $\omega \sim v/a$ , для всех труб лежит в пределах 4–6 см, что оправдывает использование приближения слабого скин-эффекта в приведенных далее вычислениях. При этом сила торможения пропорциональна скорости и может быть записана в виде  $F = -\beta M \dot{z}_m$ , где  $\beta$  — коэффициент магнитного трения,  $M = 5,5$  г — масса магнита, а  $z_m(t)$  — мгновенная координата магнита. Решая уравнение движения магнита

$$\ddot{z}_m(t) + \beta \dot{z}_m(t) = g \quad (37)$$

в поле тяжести с учетом указанной выше силы торможения при начальных условиях  $z_m(0) = 0$ ,  $\dot{z}_m(0) = v_1$ , получим

$$z_m(t) = \frac{gt}{\beta} - \frac{g - \beta v_1}{\beta^2} [1 - \exp(-\beta t)], \quad (38)$$

где  $v_1$  — скорость магнита в центре первой катушки.

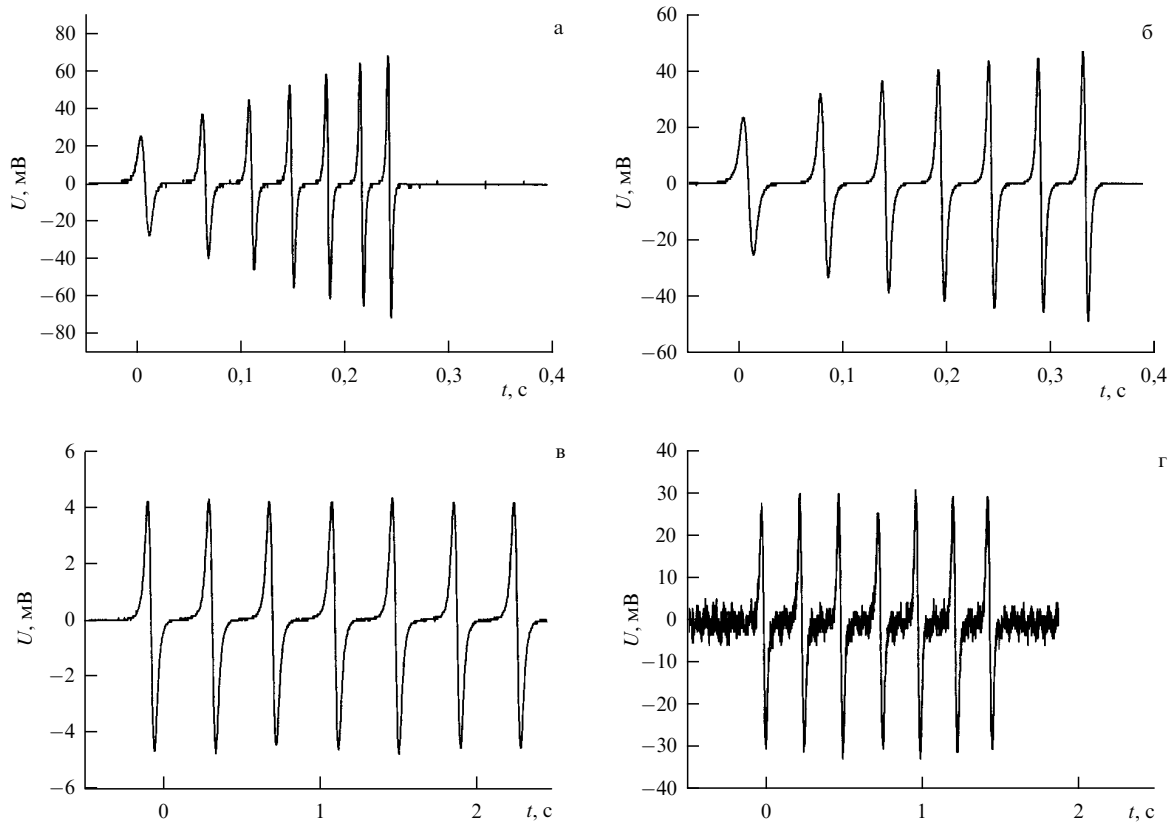
Мы использовали уравнение (38) для подгонки экспериментальных данных, представленных на рис. 7. За исключением случаев титановой и стеклянной трубок, экспериментальные данные соответствуют прямой  $t = z/v_\infty$ , потому что в хорошо проводящей трубке магнит достигает предельной скорости  $v_\infty = g/\beta$  до подлета к первой измерительной катушке; для таких трубок  $v_1 = v_\infty$ . Магнит свободно падает в стеклянной трубке, о чем свидетельствует подгоночная кривая FF (см. рис. 7). Кривая FC для титана соответствует промежуточному случаю, при котором каждый член в уравнении (37) одинаково важен.

Зная коэффициент трения  $\beta$  и проводимость трубы, нетрудно вычислить магнитный дипольный момент с

Таблица. Характеристики трубок (внешние и внутренние диаметры  $2a$  и  $2b$ , апертурный угол  $\Delta\alpha$ , удельная проводимость  $\sigma$ ) и основные экспериментальные результаты

	Медь	Алюминий			Латунь	Титан	Стекло
$\Delta\alpha$ , рад	Нет	Нет	0,32	$\pi/4$	Нет	Нет	Нет
$2a$ , мм	11,6	12,4	12,4	12,4	11,7	11,9	11,8
$2b$ , мм	15,0	16,0	16,0	16,0	13,9	14,3	15,0
$\sigma$ , $10^{17} \times \text{с}^{-1}$	5,27	1,74			1,35	0,192	—
$\beta$ , $\text{с}^{-1}$	143,0	38,0	31,3	23,0	27,2	3,8	0,137
$v_1$ ( $v_\infty$ ), $\text{см} \text{с}^{-1}$	<b>6,85</b>	<b>25,8</b>	<b>31,3</b>	<b>42,6</b>	<b>36,1</b>	116,0	140,1
$m_t$ , $\text{г}^{1/2} \text{см}^{5/2} \text{с}^{-1}$	$474 \pm 2$	—	—	—	—	$465 \pm 5$	—
$m_U$ , $\text{г}^{1/2} \text{см}^{5/2} \text{с}^{-1}$	433	429	—	—	425	436	429

Примечание. Значения  $\sigma$  для меди и титана взяты из литературных данных, для алюминиевого сплава и латуни рассчитаны по уравнению (39). Коэффициент трения  $\beta$ , начальная скорость  $v_1$  магнита на уровне первой измерительной катушки и магнитный момент  $m_t$  получены методом наименьших квадратов при подгонке временной зависимости расстояния, пройденного магнитом, с помощью уравнения (38). Значение  $v_1$ , равное предельной скорости  $v_\infty$ , выделено жирным шрифтом. Магнитный момент  $m_U$  получен в результате подгонки экспериментальных осциллограмм к расчетным (40).



**Рис. 6.** Напряжение, индуцированное в последовательности измерительных катушек в трубках из: (а) стекла, (б) титана, (в) алюминиевого сплава, (г) алюминиевого сплава с продольной прорезью при  $\Delta\alpha = \pi/2$ . Последовательность из семи катушек размещена на каждой трубке с периодом 10 см. Осциллограммы для медной, латунной и алюминиевой ( $\Delta\alpha = 0,32$ ) трубок аналогичны осциллограммам (в) и (г).

помощью уравнения (7):

$$m_i = \sqrt{\frac{64\beta MR^4 c^2}{45\pi^2 \sigma h}}, \quad (39)$$

где  $R = (a + b)/2$ . Используя данные для проводимости из разных литературных источников, мы выбрали  $\sigma = (5,27 \pm 0,03) \times 10^{17} \text{ c}^{-1}$  для меди и  $\sigma = (1,92 \pm 0,04) \times 10^{16} \text{ c}^{-1}$  для титана. Вычисленные значения магнитного момента  $m_i$  приведены в таблице. Значения  $m_i$  по результатам опытов с медной и титановой трубками согласуются между собой в разумных пределах. Однако статистическая дисперсия вычисленного значения значительно меньше, чем неопределенность в использованных значениях проводимости.

Подставляя найденное таким способом среднее значение магнитного момента  $\langle m_i \rangle = 169,5 \pm 5,5 \text{ г}^{1/2} \text{ см}^{5/2} \text{ c}^{-1}$  в уравнение (39), мы вычислили проводимость для других трубок без разрез. Полученные величины проводимости  $\sigma = 1,35 \times 10^{17} \text{ c}^{-1}$  для латуни и  $\sigma = 1,74 \times 10^{17} \text{ c}^{-1}$  для алюминиевого сплава находятся в пределах разброса табличных данных, представленных в разных справочниках.

В последней строке таблицы приведены значения магнитного момента  $m_U$ , рассчитанные иным методом. В этом методе экспериментальные осциллограммы аппроксимировались расчетной формулой

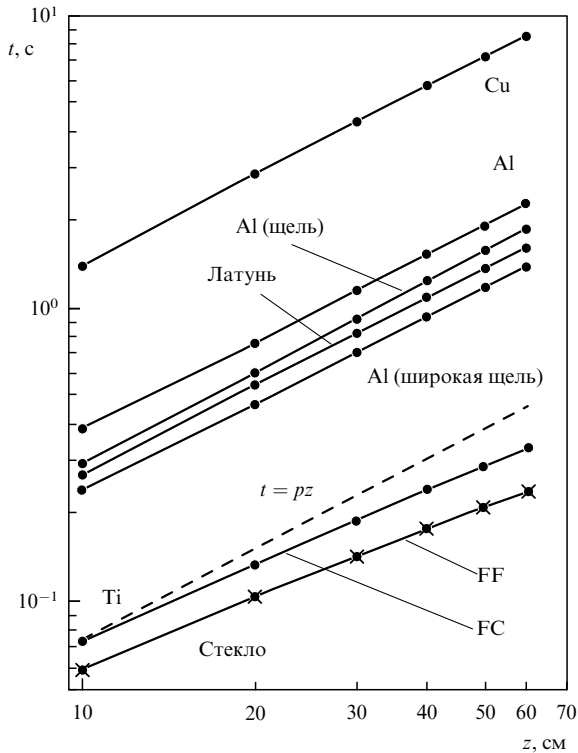
$$U(t) = \frac{6\pi m \rho}{c} \dot{z}_m(t) \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^{20} \frac{\rho(z_m(t) - z_{ij})}{[(z_m(t) - z_{ij})^2 + \rho^2]^{5/2}}, \quad (40)$$

где  $\rho = b + d/2$  — радиус измерительного витка,  $d$  — диаметр проволоки,  $z_{ij}$  — координата измерительного витка  $j$  в катушке с номером  $i$ , а  $z_m(t)$  — координата магнита в момент времени  $t$ , рассчитанная по формуле (38). Суммирование в (40) осуществляется по всем семи катушкам и 20 виткам каждой из них. Для заданной зависимости  $z_m(t)$  напряжение (40) в системе катушек имеет единственный подгоночный параметр  $m$ , что облегчает процедуру подгонки, поскольку не требуется определения проводимости материала. Подгонка по методу наименьших квадратов дает очень близкие значения  $m_U$  для всех труб, представленных в таблице, от медной до стеклянной. Однако среднее значение  $\langle m_U \rangle$  на 10% меньше, чем  $\langle m_i \rangle$ . Значение  $m_U$  кажется более достоверным, нежели  $m_i$ , поскольку второй метод использует минимум дополнительных предположений и дает результат, не зависящий от эффективности магнитного торможения, одинаковый как для хороших проводников (как медь), так и неплохих изоляторов (как стекло).

### 3.2. Падение магнита в трубе с продольным разрезом

При наличии продольной трещины или разреза распределение вихревых токов в стенке принципиально изменяется. Как показано в разделе 2.4, в трубке с разрезом токи в стенках замыкаются вдоль краев разреза (рис. 1б), тогда как в сплошной трубке вихревые токи впереди и позади магнита образуют отдельные линии (рис. 1а). Разрез увеличивает эффективное сопротивление трубки. В результате тормозящая сила уменьшается. Если использовать уравнения (35) и (36), то коэффициент трения



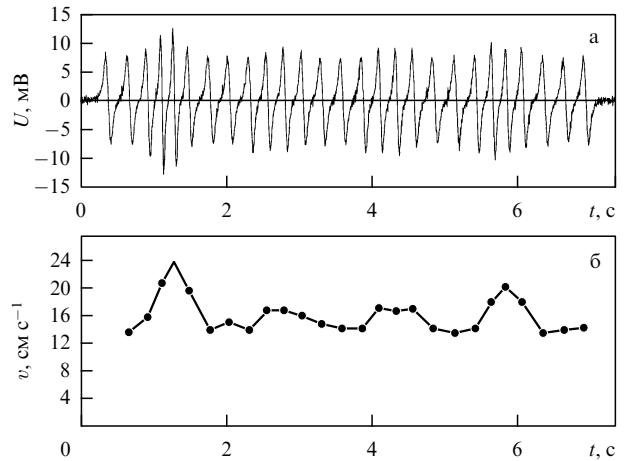


**Рис. 7.** Время пролета как функция координат измерительных катушек. Кружками обозначены моменты пролета магнита через середину соответствующей катушки. Сплошными кривыми показаны теоретические траектории (14), с помощью которых подбирались коэффициент трения  $\beta$  и начальная скорость  $v_1$ . Кривая FF для стекла с хорошей точностью соответствует свободному падению. Остальные кривые соответствуют движению с постоянной скоростью, за исключением кривой FC для титановой трубки, характеризующей переходный режим ускорения магнита. (Здесь  $p$  — некоторая константа.)

$\beta$  для трубок из алюминиевого сплава с узким ( $\Delta\alpha = 0,32$ ) и широким ( $\Delta\alpha = \pi/4$ ) разрезами должен составлять  $\beta_{th} = 27,6 \text{ с}^{-1}$  и  $\beta_{th} = 20,4 \text{ с}^{-1}$  соответственно. Экспериментальные значения, приведенные в таблице, оказываются на 10–15% больше.

Простое объяснение расхождению предсказаний теории с экспериментом можно буквально "услышать". При бросании магнита в трубу с разрезом раздается характерный скрежет, отсутствующий при падении в сплошной трубе. Это означает, что магнит трется о внутреннюю поверхность стенки, если имеется разрез, но не соприкасается со стенкой в сплошной трубе. Так как разрез нарушает азимутальную симметрию трубки, вихревые токи, текущие вдоль противоположных сторон разреза, создают магнитное поле  $\mathbf{V}_\perp$ , направленное в точке мгновенного положения магнита в сторону разреза. Это поле создает вращательный момент  $\mathbf{K} = \mathbf{m} \times \mathbf{V}_\perp$ , который поворачивает магнит в плоскости, проходящей через центр магнита и середину разреза. Поскольку диаметр магнита в наших опытах был всего на 2 мм меньше внутреннего диаметра трубки, крутящий момент прижимал противоположные грани магнита к внутренней поверхности стенки, увеличивая силу торможения, по сравнению с предсказанной уравнением (35), за счет механического трения магнита о стенку трубки.

Чтобы продемонстрировать этот эффект, мы прорезали в алюминиевой трубке длиной 110 см четыре щели



**Рис. 8.** Падение магнита в трубке с последовательностью продольных разрезов: (а) осциллограммы сигнала от последовательности из 27 измерительных катушек; (б) зависимость скорости магнита от времени, полученная из осциллограмм. При повороте трубки на  $180^\circ$  вокруг горизонтальной оси форма осциллограмм сохраняется с точностью до изменения направления оси времени.

длиной по 12 см, чередуя их с 12-сантиметровыми неразрезанными участками. Щели имели различную угловую ширину  $\Delta\alpha/\pi$ : 0,2, 0,1, 0,05, 0,025. Двадцать семь измерительных катушек были равномерно с шагом 4 см распределены вдоль трубки. Характерная осциллограмма и зависимость скорости магнита от времени показаны на рис. 8. Магнит в такой трубке движется довольно медленно, так что эксперимент без всяких приборов ясно подтверждает то, что скрежет появляется, когда магнит проходит участок со щелью, но исчезает, когда магнит оказывается на участке без разреза. Скорость магнита в конце всех сплошных участков достигает предельного (постоянного) значения, а на участках с разрезами не убывает монотонно с уменьшением ширины щелей, как можно было бы ожидать на основе анализа уравнения (35), в котором механическое трение о стенку не учитывается.

Полная сила торможения на разрезанных участках является суммой магнитного торможения и механического трения о стенку. Немонотонность зависимости измеренной силы торможения можно объяснить немонотонностью зависимости момента сил  $K$  от ширины разреза. Используя решение (34) для тока в стенке трубки, находим, что

$$K = \frac{m^2}{a^3} \frac{45\pi}{256} \mathcal{K}\left(\pi - \frac{1}{2} \Delta\alpha\right) \varepsilon \eta, \tag{41}$$

где

$$\mathcal{K}(\chi) = \frac{512}{45\pi^3} \int_0^\infty dy \frac{y^3}{1+y^2} K_1(y) [yK_0(y) + K_1(y)] \times [y \sin \chi - \cos \chi \tanh(\chi y)].$$

Отношение силы давления магнита на стенку  $N$  к тормозящей силе (24), которая действует на магнит в неразрезанной трубке, пропорционально  $K$ . Сила механического трения  $F = kN$  пропорциональна  $N$ , причем коэффициент трения  $k$  обычно меньше единицы,  $k < 1$ . Как видно из рис. 9, крутящий момент достигает

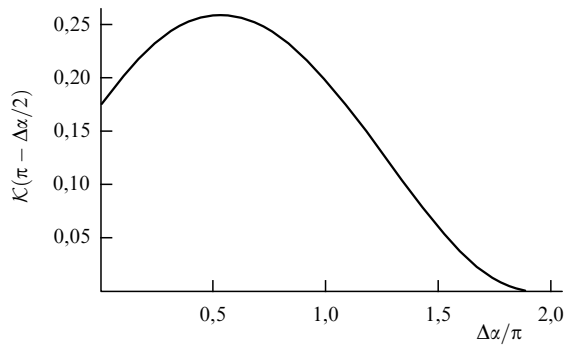


Рис. 9. Функция  $K(\Delta\alpha)$ .

максимума при  $\Delta\alpha = 0,53\pi = 96^\circ$ . В зависимости от значения  $k$  максимум полной тормозящей силы может достигаться при меньшей угловой ширине разреза. Такая особенность качественно объясняет вариации скорости магнита, наблюдаемые в опыте с многощелевой трубкой. Другим эффектом, который также может привести к возрастанию силы трения, является увеличение угла поворота магнита при расширении разреза.

#### 4. Заключение

Тщательное исследование эффекта торможения магнита в проводящей трубке оказалось намного поучительнее, чем это обычно считается. Мы обнаружили, что кроме режима медленного движения, характеризующегося линейной зависимостью тормозящей силы от скорости магнита, имеется еще два режима, в которых сила уменьшается по мере роста скорости. Подобное явление хорошо известно в физике плазмы, где оно приводит к неограниченному ускорению электронов в плазме электрическим полем, превышающим критическое значение.

Наши опыты показали, что торможение магнита можно использовать для обнаружения трещин в стенках трубы. В этих опытах также неожиданно выявилась немонотонность зависимости силы торможения от

ширины разреза, которую удалось объяснить как следствие поворота магнита в магнитном поле токов, текущих по противоположным берегам разреза.

Таким образом, простой эксперимент по магнитному торможению можно использовать для того, чтобы предложить студентам новую тему исследования в хорошо, казалось бы, изученной области физики. В частности, в лабораторный практикум "Электричество и магнетизм" кафедры общей физики Новосибирского государственного университета уже включена работа "Токи Фуко и магнитное трение". В качестве курсовой работы можно предложить более сложные эксперименты, например, по проверке предсказанного нами режима, в котором тормозящая сила уменьшается с ростом скорости магнита.

**Благодарности.** Авторы благодарят П.Д. Воблого за предоставленный в наше распоряжение магнит, а также Г.В. Меледина и А.Н. Матвеевко за полезные обсуждения.

#### Список литературы

1. Marcuso M et al. *Am. J. Phys.* **59** 1118 (1991)
2. Marcuso M et al. *Am. J. Phys.* **59** 1123 (1991)
3. Saslow W M *Am. J. Phys.* **60** 693 (1992)
4. Ribarić M, Šuštersić L *Am. J. Phys.* **60** 513 (1992)
5. MacLatchy C S, Backman P, Bogan L *Am. J. Phys.* **61** 1096 (1993)
6. Cadwell L H *Am. J. Phys.* **64** 917 (1996)
7. Hahn K D et al. *Am. J. Phys.* **66** 1066 (1998)
8. Kraftmakher Y *Eur. J. Phys.* **22** 477 (2001)
9. Redžić D V *Eur. J. Phys.* **23** 127 (2002)
10. Меледин Г В, частное сообщение (2002)
11. Янке Е, Эмде Ф, Лёш Ф *Специальные функции: Формулы, графики, таблицы* (М.: Наука, 1964)
12. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982) с. 414
13. Fahy S, Kittel C, Louie S G *Am. J. Phys.* **56** 989 (1988)
14. Cherkassky V S, Knyazev B A, Kotelnikov I A "Electromagnetic screening by a thin conducting can", Preprint Budker INP 2003-71 (Novosibirsk: Budker Institute of Nuclear Physics of the Siberian Branch of Russian Academy of Science, 2003)

#### Braking of a magnetic dipole moving through a conducting pipe at a arbitrary velocity

**B.A. Knyazev, I.A. Kotelnikov**

*G.I. Budker Institute of Nuclear Physics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, prosp. Lavrent'eva 11, 630090 Novosibirsk, Russian Federation*

*Tel. (7-383) 339-42 68*

*E-mail: b.a.knyazev@inp.nsk.su; i.a.kotelnikov@nsk.su*

**A.A. Tyutin, V.S. Cherkassky**

*Department of Physics, Novosibirsk State University, ul. Pirogova 2, 630090 Novosibirsk, Russian Federation*

*Tel. (7-383) 339-78 05*

*E-mail: cherk@phys.nsu.ru*

Lectures introducing students to magnetic induction often feature the popular experiment in which a small magnet falling down a conducting pipe is markedly slowed down by the retarding force due to Foucault eddy currents arising in the pipe. In this paper, a formula for the retarding force is derived, valid both for low velocities (when the force is proportional to the magnet velocity  $v$ ) and high velocities (when it first decreases like  $v^{-1}$  and then like  $v^{-1/2}$ ). The last two regimes are analogous to the collisionless (and hence unbounded) acceleration of plasma electrons and have not been previously described in the literature. The calculation of the retarding force in the presence of a longitudinal cut along the length of the pipe is carried out, and experiments to measure this force are discussed.

PACS numbers: **01.50.-i, 41.20.Gz**

Bibliography — 14 references

*Received 31 August 2005*

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **176** (9) 965–974 (2006)

*Physics–Uspekhi* **49** (9) (2006)